Coleção Tribunais e MPU
Coordenador HENRIQUE CORREIA

VALÉRIA LANNA

# Raciocínio Lógico e Matemática

PARA OS CONCURSOS DE TÉCNICO, ANALISTA E PERITO DO INSS E TÉCNICO E ANALISTA DOS TRIBUNAIS

6.ª edição
Revista e atualizada

2019

EDITORA JusPODIVM
www.editorajuspodivm.com.br

CAPÍTULO 1

# Noções de conjuntos

Conjunto é um agrupamento de elementos.

Se um elemento compõe um conjunto, dizemos que ele pertence a este conjunto, indicamos com o símbolo $\in$. Por exemplo: seja A o conjunto dos múltiplos de 3, escrevemos:

- *$6 \in A$ (6 pertence a A) e $8 \notin A$ (8 não pertence a A).*

Embora os elementos de um conjunto possam ser qualquer coisa (mesmo outros conjuntos), representamos os conjuntos por letras maiúsculas e os elementos por letras minúsculas.

## REPRESENTAÇÃO

### Por enumeração

Conjunto dos ímpares maiores que 10 e menores que 20

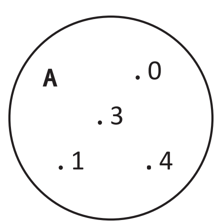
- *$A = \{ 11, 13, 15, 17, 19 \}$*

### Por propriedade

- *$A = \{ x / x$ é par $3 < x < 11 \}$ que corresponde ao conjunto $A = \{4, 6, 8, 10\}$*

### Por diagrama

- *$A = \{ 0, 1, 3, 4 \}$*




## CONJUNTO VAZIO

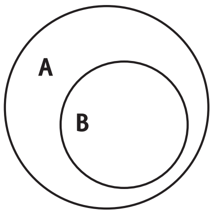
Denomina-se CONJUNTO VAZIO o conjunto que não possui elementos. Indica-se por $\varnothing$ ou por { }, mas não ambos $\rightarrow \{\varnothing\}$

- *O conjunto de números que são pares e ímpares aos mesmo tempo.*
- *O conjunto de números inteiros entre 1 e 2.*

## IGUALDADE DE CONJUNTOS

Dois ou mais conjuntos que possuem os mesmos elementos são iguais.

## SUBCONJUNTOS OU PARTES DE UM CONJUNTO




Sejam os conjuntos A e B, onde os elementos de B estão contidos em A, então dizemos que $B \subset A$ (B está contido em A) ou que $A \supset B$ (A contém B).

O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

*Obs.:* Número de Subconjuntos é dado por $2^n$, onde n é número de elementos do conjunto.

✦ **Exemplo 01:** *A = {1,2,3} o número de subconjuntos será $2^3 = 8$ subconjuntos, ou seja, P(A) = {∅, {1},{2},{3},{1,2},{1,3},{2,3},{1,2,3}}*

✦ **Exemplo 02:** *Um conjunto possui 512 subconjuntos, ao retirarmos 3 elementos desse conjunto, quantos subconjuntos terá o novo conjunto?*

» *Resolução:* $512 = 2^n$, logo ao fatorarmos $512 = 2^9$, ou seja, teremos n = 9, menos 03 elementos sobram 06 elementos e então o novo conjunto ficará com $2^6 = 64$ subconjuntos.

O assunto que vou abordar agora tem haver com o porque da operação $2^n$, ou seja, por que o 2 elevado a n?

A ideia é que ao agruparmos as partes de um conjunto devemos "olhar' para cada elemento e decidir se ele vai ou não fazer parte do subconjunto, assim temos "duas" opções de escolha para cada elemento,logo como temos ***n*** elementos, teremos: 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x... ***n*** vezes, ou seja, $2^n$.

Mas, se as partes de um conjunto são feitas de agrupamentos, então podemos concluir que os subconjuntos de um conjunto, nada mais são que , agrupamentos aleatórios.

O que nos leva ao memorável *Blaise Pascal.*

## TRIÂNGULO DE PASCAL

Agora faremos uma pausa para recordarmos de um instrumento muito útil para explicar o porque do número de partes de um conjunto ser $2^n$ , além de ser uma ferramenta muito útil no estudo de Análise Combinatória.

O triângulo de Pascal é de Pascal?

Qualquer pessoa que tenha um pouco de leitura e bom senso deve no mínimo estar suspeitando que o triângulo aritmético não seja uma descoberta ou invenção de Pascal. Por exemplo: a denominação desse triângulo varia muito ao longo do mundo. Com efeito, se bem que os franceses o chamem de triângulo de Pascal, os chineses o chamam de triângulo de Yang Hui, os italianos o chamam de triângulo de Tartaglia e encontramos outras denominações como triângulo de Tartaglia-Pascal ou simplesmente triângulo aritmético ou triângulo combinatório.

Conforme descobriu Tartaglia, cerca de cem anos antes de Pascal, o triângulo aritmético também é bastante útil no cálculo de probabilidades. Com efeito, é fácil vermos que os coeficientes das expansões binomiais tem um significado combinatorial e, então, probabilístico.

Para construir o triângulo, Pingala, na Índia (2000 anos antes de Pascal) descreve a seguinte regra:

*Desenhe um quadradinho; abaixo dele desenhe dois outros, de modo que juntem-se no ponto médio da base dele; abaixo desses dois, desenhe outros três e assim por diante. A seguir, escreva 1 no primeiro quadradinho e nos da segunda linha. Na terceira linha escreva 1 nos quadradinhos dos extremos, e no do meio escreva a soma dos números acima dele. Prossiga fazendo o mesmo nas demais linhas. Nessas linhas, a segunda dá as combinações com uma sílaba; a terceira dá as combinações com duas sílabas e assim por diante.*

Os livros indianos eram escritos em folhas de palmeira o que fez com que poucos deles chegassem aos nossos dias.

Na China, 1700 anos antes de Pascal, o uso que os antigos chineses faziam do triângulo aritmético centrava-se no cálculo aproximado de raízes quadradas, cúbicas e etc. Os chineses não tinham uma álgebra literal e todo seu envolvimento com problemas algébricos era baseado em uma notação e procedimentos apropriados para o emprego de varetas de cálculo (instrumento que precedeu o conhecido *suan pan*, o ábaco chinês). O triângulo aritmético, que denominavam *sistema de tabulação para descobrir coeficientes binomiais*, encaixava-se perfeitamente bem nesse esquema.

E assim por diante.

O triângulo de Pascal (alguns países, nomeadamente em **Itália**, é conhecido como Triângulo de Tartaglia) é um **triângulo** numérico infinito formado por números combinatórios.

**Para Pascal nós podemos conhecer em essência e completamente as coisas**

No texto *O Homem perante a natureza*, de Pascal, ele relata que:

> Não procuremos segurança e firmeza. Nossa razão é sempre iludida pela inconstância das aparências e nada pode fixar o finito entre os dois infinitos que o cercam e dele se afastam. Creio que a concepção deste inevitável fará que o homem se conforme com o estado em que a natureza o colocou e o mantenha tranquilo. Esse termo médio que nos

coube por destino, situa-se sempre os dois extremos, de modo que pouco nos importa tenha o homem maior ou menor inteligência das coisas. Se a tiver as verá apenas de um pouco mais alto. Mas não se achará sempre infinitamente afastado da meta, e a duração de nossa vida não o estará também, infinitamente, afastada da eternidade, embora dure dez anos mais?

Se tivermos em mente estes infinitos, todos os finitos serão iguais; e não vejo razão para assentar a imaginação em um deles e a preferência ao outro. A simples comparação entre nós e o infinito nos acabrunha.

Se o homem procurasse conhecer a si mesmo antes de tudo, perceberia logo a que ponto é incapaz de alcançar outra coisa.

Como poderia uma parte conhecer o todo? Mas a parte pode ter, pelo menos, a ambição de conhecer as partes, as quais cabem dentro de suas próprias proporções. E como as partes do mundo têm sempre relações íntimas e intimamente se encadeiam, considero impossível compreender ma sem alcançar as outras, e sem penetrar o todo.

O homem, por exemplo, tem relações para durar, de movimento para viver, de elementos que o constituam, de alimentos e calor que o nutram, de ar para respirar; vê a luz, percebe os corpos; em suma, tudo se alia a ele próprio.

Para conhecer o homem, portanto, mistério se faz saber de onde vem que precisa de ar para subsistir; e para conhecer o ar é necessário compreender donde provém essa sua relação com a vida do homem, etc. A chama não subsiste sem o ar; o conhecimento de uma coisa, se liga, pois, ao conhecimento de outra. E como todas as coisas são causadoras e causadas, auxiliadoras e auxiliadas, mediatas e imediatas, e todas se acham presas por um vínculo natural e insensível que une as mais afastadas e diferentes, parece-me impossível conhecer as partes sem conhecer o todo, bem como conhecer o todo sem entender particularmente as partes. (A eternidade das coisas, em si mesmas ou em Deus, deve assombrar a nossa ínfima duração. A imobilidade fixa e constante da natureza, em comparação com a transformação contínua que se verifica em nós, deve causar o mesmo efeito). E o que completa a nossa incapacidade de conhecer as coisas é o fato de serem simples em si enquanto nós somos complexos de natureza antagônicos e de gêneros diversos, alma e corpo. Pois é impossível que a parte raciocinante de nós mesmos não seja unicamente espiritual; e se pretenderem que somos tão somente corporais, mais afastarão ainda de nós o conhecimento das coisas, porquanto nada mais será inconcebível do que a matéria conhecer-se a si própria; não podemos conceber de que maneira se conheceria. Assim, se somos simplesmente materiais nada podemos conhecer; e se somos compostos de espírito e matérias não podemos conhecer perfeitamente as coisas simples, espirituais ou corporais.

Donde a confusão generalizada entre os filósofos que misturam as ideias das coisas, falando espiritualmente das coisas corporais e corporalmente das coisas espirituais.

| ▶ TRIÂNGULO DE PASCAL | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N = 0 | 1 | | | | | | | | |
| N = 1 | 1 | 1 | | | | | | | |
| N = 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | | |
| N = 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | |
| N = 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | |
| N = 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | |
| N = 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | |
| N = 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | |
| N = 8 | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 |
| | P = 0 | P = 1 | P = 2 | P = 3 | P = 4 | P = 5 | P = 6 | P = 7 | P = 8 |

No exemplo 01 em que consideramos o conjunto A = {1,2,3} e que o número de subconjuntos será $2^3 = 8$ subconjuntos (soma das linhas) ,ou seja,

P(A)={∅,{1},{2},{3},{1,2},{1,3},{2,3},{1,2,3}}.

Veja também que se o conjunto A possui 03 elementos ele está diretamente ligado à linha 03 do triângulo e seus subconjuntos também, por exemplo:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| n = 3 | 1 | 3 | 3 | 1 |
| n = 4 | ... | ... | ... | ... |
| n = 5 | ... | ... | ... | ... |
| n = 6 | ... | ... | ... | ... |
| | p = 0 | p = 1 | p = 2 | p = 3 |

P(A)={∅,{1},{2},{3},{1,2},{1,3},{2,3},{1,2,3}}

Em P(A), acima enumerado, temos através da terceira linha (n = 3) e na coluna onde p = 0 , o número 1, ou seja, um subconjunto com zero elementos; na coluna onde p = 1 , o número 3, ou seja, 3 subconjuntos com um elemento cada; na coluna onde p = 2, o número 3, ou seja, 3 subconjuntos possuem dois elementos e na coluna onde p = 3, temos o número 1, ou seja, um subconjunto com 03 elementos.

✦ **Exemplo 03:** Cor da pele humana

» No caso da cor da pele humana, considerando apenas 5 fenótipos, envolvendo dois pares de genes N e B, que teriam a mesma função, ou seja, acrescentar uma certa quantidade de melanina à pele, se efetivos (N ou B) ou não acrescentar nada, se não efetivos (n ou b).

Se acontecer um cruzamento entre dihíbridos, quais serão as proporções fenotípicas da descendência? Usando a Genética: (quais são os gametas e os tipos possíveis de filhos gerados?)

*NnBb* x *NnBb* Gametas produzidos por ambos: NB, Nb, nB e nb

| ▶ GAMETAS | NB | Nb | nB | nb |
|---|---|---|---|---|
| **NB** | NNBB | NNBb | NnBB | NnBb |
| **Nb** | NNBb | NNbb | NnBb | Nnbb |
| **nB** | NnBB | NnBb | nnBB | nnBb |
| **nb** | NnBb | Nnbb | nnBb | nnbb |

| ▶ FENÓTIPOS | ▶ NÚMERO DE GENES |
|---|---|
| **Negro(NNBB)** | 4 genes efetivos e 0 não efetivos |
| **mulatos escuros (NNBb ou nNBB)** | 3 genes efetivos e 1 não efetivo |
| **mulatos médios (NNbb, nnBB ou NnBb)** | 2 genes efetivos e 2 não efetivos |
| **mulatos claros (Nnbb ou nnBb)** | 1 gene efetivo e 3 não efetivos |
| **Branco (nnbb)** | 0 genes efetivos e 4 não efetivos |

Usando o Triângulo de Pascal:

Chama-se de p = genes efetivos = 2 (N ou B) e de q = genes não efetivos = 2 (n ou b)

Procura-se no triângulo a linha em que o número de genes é igual a 4.

| ▶ Nº GENES | ▶ COEFICIENTES |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 1 |
| 2 | 1 2 1 |
| 3 | 1 3 3 1 |
| 4 | 1 4 6 4 1 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Negro | 4 efetivos e 0 não efetivo |
| 4 | Mulatos escuros | 3 efetivos e 1 não efetivo |
| 6 | Mulatos médios | 2 efetivos e 2 não efetivos |
| 4 | Mulatos claros | 1 efetivo e 3 não efetivos |
| 1 | Branco | 0 efetivo e 4 não efetivos |

Portanto, na descendência chega-se à seguinte proporção fenotípica: 1 negro : 4 mulatos escuros : 6 mulatos médios : 4 mulatos claros : 1 branco

## Curiosidades do Triângulo de Pascal

Vejamos o triângulo na sua forma original com 12 linhas:

1<br>
1 1<br>
1 2 1<br>
1 3 3 1<br>
1 4 6 4 1<br>
1 5 10 10 5 1<br>
1 6 15 20 15 6 1<br>
1 7 21 35 35 21 7 1<br>
1 8 28 56 70 56 28 8 1<br>
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1<br>
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1<br>
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

## *Curiosidade Matemática*

Uma outra aplicação do triângulo de Pascal é o desenvolvimento de binômios, ou seja, polinômios elevados à potências, os chamados produtos notáveis:

$(a + b)^2 = (a + b).(a + b) = a.a + a.b + b.a + b.b = a^2 + 2.a.b + b^2$ (Quadrado perfeito)

Observando os números da terceira linha (n = 2) do triângulo (1, 2, 1) pode-se perceber que eles representam os coeficientes de $a^2$, a.b e $b^2$, ou seja: $\mathbf{1}.a^2 + \mathbf{2}.a.b + \mathbf{1}.b^2$.

O mais interessante, ainda, é que através do Triângulo de Pascal pode-se desenvolver, além do produto notável $(a + b)^2$, outros produtos do tipo $(a + b)^3$, $(a + b)^4$ e, assim por diante...

- $N = 3 \rightarrow (a + b)^3 = \mathbf{1}.a^3 + \mathbf{3}.a^2.b + \mathbf{3}.a.b^2 + \mathbf{1}.b^3$ (quarta linha → n = 3)
- $N = 4 \rightarrow (a + b)^4 = \mathbf{1}.a^4 + \mathbf{4}.a^3.b + \mathbf{6}.a^2.b^2 + \mathbf{4}.a.b^3 + \mathbf{1}.b^4$ (quinta linha → n = 4)
- $N=5 \rightarrow (a+b)^5 = \mathbf{1}.a^5 + \mathbf{5}.a^4.b + \mathbf{10}.a^3.b^2 + \mathbf{10}.a^2.b^3 + \mathbf{5}.a.b^4 + \mathbf{1}.b^5$ (sexta linha→n=5)

### *Método*

- em cada monômio da expressão algébrica há um produto do termo **a** pelo termo **b**, isto é **a.b** ;
- a partir do primeiro monômio os expoentes de **a** vão "decrescendo" e os de **b** vão "crescendo";

- a soma dos expoentes de cada monômio da expressão algébrica é igual ao expoente do binômio;
- o primeiro expoente de **a** é igual ao expoente do binômio e o último é zero;
- o primeiro expoente de **b** é zero e o último é igual ao expoente do binômio;
- a expressão algébrica possuirá 1 termo a mais que o expoente do binômio.
- em todos os termos aparece o produto **a.b** (lembre-se que $a^0 = b^0 = 1$, $a^1 = a$ , $b^1 = b$)
- expoentes de **a**: 5, 4, 3, 2, 1, 0 (ordem decrescente)
- expoentes de **b**: 0, 1, 2, 3, 4, 5 (ordem crescente)
- soma do expoentes de **a** e de **b** em cada monômio: 5 (expoente do binômio)
- a expressão algébrica obtida possui 6 termos (5 + 1)

## Construção do Triângulo de Pascal

Vou mostrar como construí-lo passo a passo e você verá que não é difícil:

Vamos construir um triângulo de 07 linhas por 07 colunas , para isto temos que numerar as linhas assim:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n = 0 | | | | | | | | |
| n = 1 | | | | | | | | |
| n = 2 | | | | | | | | |
| n = 3 | | | | | | | | |
| n = 4 | | | | | | | | |
| n = 5 | | | | | | | | |
| n = 6 | | | | | | | | |
| n = 7 | | | | | | | | |

Agora preenchemos a primeira coluna só de "uns":

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n = 0 | 1 | | | | | | | |
| n = 1 | 1 | | | | | | | |
| n = 2 | 1 | | | | | | | |
| n = 3 | 1 | | | | | | | |
| n = 4 | 1 | | | | | | | |
| n = 5 | 1 | | | | | | | |
| n = 6 | 1 | | | | | | | |
| n = 7 | 1 | | | | | | | |

Em seguida começamos na segunda coluna numerando de 1 até 7, pois queremos um triângulo de sete linhas:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n = 0 | 1 | | | | | | | |
| n = 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| n = 2 | 1 | 2 | | | | | | |
| n = 3 | 1 | 3 | | | | | | |
| n = 4 | 1 | 4 | | | | | | |
| n = 5 | 1 | 5 | | | | | | |
| n = 6 | 1 | 6 | | | | | | |
| n = 7 | 1 | 7 | | | | | | |

Agora começamos a terceira coluna com 1, aliás as colunas sempre começam com um e sempre em escadinha:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n = 0 | 1 | | | | | | | |
| n = 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| n = 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | |
| n = 3 | 1 | 3 | | 1 | | | | |
| n = 4 | 1 | 4 | | | 1 | | | |
| n = 5 | 1 | 5 | | | | 1 | | |
| n = 6 | 1 | 6 | | | | | 1 | |
| n = 7 | 1 | 7 | | | | | | 1 |

Existe uma regra de Stifel em que somos em "L" para encontrarmos o próximo elemento, veja o diagrama:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n = 0 | 1 | | | | | | | |
| n = 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| n = 2 | 1 | 2 + | 1 | | | | | |
| n = 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | |
| n = 4 | 1 | 4 | | | 1 | | | |
| n = 5 | 1 | 5 | | | | 1 | | |
| n = 6 | 1 | 6 | | | | | 1 | |
| n = 7 | 1 | 7 | | | | | | 1 |

Agora vamos achar o elemento 4ª linha:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n = 0 | 1 | | | | | | | |
| n = 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| n = 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | |
| n = 3 | 1 | 3 + | 3 | 1 | | | | |
| n = 4 | 1 | 4 | 6 | | 1 | | | |
| n = 5 | 1 | 5 | | | | 1 | | |
| n = 6 | 1 | 6 | | | | | 1 | |
| n = 7 | 1 | 7 | | | | | | 1 |

Agora vamos achar o elemento 5ª linha:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n = 0 | 1 | | | | | | | |
| n = 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| n = 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | |
| n = 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | |
| n = 4 | 1 | 4 + | 6 | | 1 | | | |
| n = 5 | 1 | 5 | 10 | | | 1 | | |
| n = 6 | 1 | 6 | | | | | 1 | |
| n = 7 | 1 | 7 | | | | | | 1 |

Agora vamos achar o elemento 6ª linha:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n = 0 | 1 | | | | | | | |
| n = 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| n = 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | |
| n = 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | |
| n = 4 | 1 | 4 | 6 | | 1 | | | |
| n = 5 | 1 | 5 + | 10 | | | 1 | | |
| n = 6 | 1 | 6 | 15 | | | | 1 | |
| n = 7 | 1 | 7 | | | | | | 1 |

Agora vamos achar o elemento 7ª linha:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n = 0 | 1 | | | | | | | |
| n = 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| n = 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | |
| n = 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | |
| n = 4 | 1 | 4 | 6 | | 1 | | | |
| n = 5 | 1 | 5 | 10 | | | 1 | | |
| n = 6 | 1 | 6 + | 15 | | | | 1 | |
| n = 7 | 1 | 7 | 21 | | | | | 1 |

Agora vamos para a próxima coluna e repetimos todo o processo, 4ª linha:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n = 0 | 1 | | | | | | | |
| n = 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| n = 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | |
| n = 3 | 1 | 3 | 3 + | 1 | | | | |
| n = 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | |
| n = 5 | 1 | 5 | 10 | | | 1 | | |
| n = 6 | 1 | 6 | 15 | | | | 1 | |
| n = 7 | 1 | 7 | 21 | | | | | 1 |

Calculando a 5ª linha: