

Josimar Padilha

RACIOCÍNIO LÓGICO-MATEMÁTICO

Fundamentos e
Métodos Práticos



4^a edição
revista, atualizada
e ampliada

2021

 EDITORA
*Jus*PODIVM

www.editorajuspodivm.com.br

Capítulo 1

Lógica de Primeira Ordem-Proposicional

Estruturas Lógicas

CONCEITOS INICIAIS

A lógica formal não se ocupa com os conteúdos pensados ou com os objetos referidos pelo pensamento, mas apenas com a forma pura e geral dos pensamentos, expressa pela linguagem. O objeto da lógica é a proposição que exprime, por meio da linguagem, os juízos formulados pelo pensamento. A proposição é a atribuição de um predicado a um sujeito.

Nas últimas provas de concursos públicos, as bancas exigiram dos candidatos uma noção mais específica da lógica de primeira ordem, voltando-se para a teoria, no que diz respeito à relação existente entre sentenças, proposições e expressões. Neste capítulo abordaremos a lógica das proposições.

I – Sentenças

- Expressão de um pensamento completo.
- São compostas por um sujeito (algo que se declara) e por um predicado (aquilo que se declara sobre o sujeito).

Ex.: José passou no concurso público.

Lógica não é difícil.

Que horas começa o filme?

Que belas flores!

Pegue essa xícara agora.

Percebemos que as sentenças podem ser:

- s
e
n
t
e
n
ç
a
s
- **Afirmativas**
Ex.: A lógica é uma ciência do raciocínio.
 - **Negativas**
Ex.: José não vai à festa.
 - **Imperativas**
Ex.: Faça seu trabalho com dedicação.
 - **Exclamativas**
Ex.: Que dia lindo!
 - **Interrogativas**
Ex.: Qual é o seu nome?

a) Sentenças Abertas

São as sentenças nas quais não podemos determinar o sujeito. Uma forma mais simples de identificá-las é o fato de que não podem ser nem V (verdadeiras) nem F (falsas). Ex.: Ela foi a melhor atleta da competição.

Algumas sentenças são chamadas abertas porque não são passíveis de interpretação para que possam ser julgadas como verdadeiras (V) ou falsas (F). Exemplo, se tivermos uma proposição expressa: “**Para todo a, P(a)**”, em que **a** é um elemento qualquer do conjunto **U**, e **P(a)** é uma propriedade a respeito dos elementos de **U**, logo se torna necessário explicitar **U** e **P** para que seja possível valorar. Ex.: $\{x \in \mathbb{R} / x > 2\}$, neste caso **x** pode ser qualquer número maior que 2, ou seja, não há um sujeito específico.

Há expressões às quais não se pode atribuir um valor lógico V ou F, por exemplo: “Ele é juiz do TRT da 1ª Região”, ou “ $x + 5 = 10$ ”. O sujeito é uma variável que pode ser substituído por um elemento arbitrário, transformando a expressão em uma proposição que pode ser valorada como V ou F. Expressões dessa forma são denominadas sentenças abertas, ou funções proposicionais. Pode-se passar de uma sentença aberta a uma proposição por meio dos quantificadores “qualquer que seja”, ou “para todo”, indicado por \forall , e “existe”, indicado por \exists . Por exemplo: a proposição $(\forall x)(x \in \mathbb{R})(x + 3 = 9)$ é valorada como F, enquanto a proposição $(\exists x)(x \in \mathbb{R})(x + 3 = 9)$ é valorada como V.

b) Sentenças Fechadas

São aquelas nas quais podemos determinar o sujeito da sentença.

Ex.: Antônio está de férias.

O professor Marcelo foi trabalhar.

Na lógica sentencial, denomina-se proposição uma frase que pode ser julgada como verdadeira (V) ou falsa (F), mas não como ambas. Assim, frases como “Como está o tempo hoje?” e “Esta frase é falsa” não são proposições, porque **a primeira é pergunta (sentença interrogativa) e a segunda não pode ser nem V nem F.**

II – Expressões

Por exclusão, temos que são aquelas que não são sentenças.

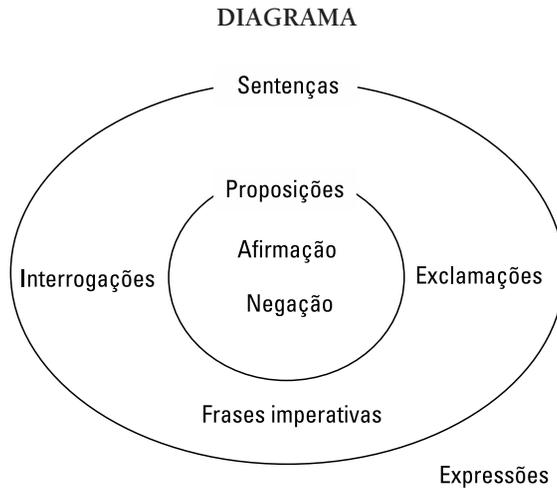
Ex.: Vinte e cinco centésimos.

A terça parte de um número.

III – Proposições

Dá-se o nome de proposição a uma sentença (afirmativa ou negativa) formada por palavras ou símbolos que expressam um pensamento de sentido completo, as quais se podem atribuir um valor lógico, ou seja, **uma valoração (verdadeira ou falsa)**.

Esta valoração também é chamada de valor lógico ou valor-verdade.



Aplicação

(Cespe/2008) “A seguinte proposição “Ninguém ensina ninguém” é um exemplo de sentença aberta”.

Comentário

Esta questão é interessante, pois exige do candidato uma diferenciação entre os conceitos já citados, em que muitos iriam se deter em interpretar a frase sugerida. O que se deve perceber é que quando o Cespe cita que a proposição “Ninguém ...” é uma sentença aberta, torna-se uma contradição, uma vez que uma proposição pode ser valorada, o que não ocorre com uma sentença aberta (não há como se valorar). Logo, o item está errado.

QUESTÕES COMENTADAS

- **(Ano: 2019 Banca: CESP Órgão: TJ-PR Prova: Técnico Judiciário) Considere as seguintes sentenças.**
 - I. A ouvidoria da justiça recebe críticas e reclamações relacionadas ao Poder Judiciário do estado.**
 - II. Nenhuma mulher exerceu a presidência do Brasil até o ano 2018.**
 - III. Onde serão alocados os candidatos aprovados no concurso para técnico judiciário do TJ/PR?**

Assinale a opção correta.

 - a) Apenas a sentença I é proposição.
 - b) Apenas a sentença III é proposição.
 - c) Apenas as sentenças I e II são proposições.
 - d) Apenas as sentenças II e III são proposições.
 - e) Todas as sentenças são proposições.

Comentário:

Nesta questão é possível verificar que os itens I e II podem ser valorados, ou seja, podem receber o valor lógico de verdadeiro ou falso, o que os tornam proposições.

Sobre o item III sabemos que frases interrogativas, imperativas, exclamativas, sentenças abertas, sem verbos e paradoxos não são proposições.

Resposta: C

- **(IBFC - Soldado (CBM BA) /2020) O conceito mais fundamental de lógica é a proposição. Dentre as afirmações abaixo, assinale a alternativa correta que apresenta uma proposição.**
 - a) Façam silêncio.
 - b) Que cansaço!
 - c) Onde está meu chaveiro?
 - d) Um belo exemplo de vida.
 - e) Ainda é cedo.

Comentário:

Na lógica sentencial, denomina-se proposição uma frase que pode ser julgada como verdadeira (V) ou falsa (F), mas não como ambas. As alternativas “a”, “b”, “c”, e “d” não podem ser consideradas proposições, pois respectivamente temos uma frase imperativa, uma frase exclamativa, uma frase interrogativa e outra que não pode ser valorada. Isto é, são consideradas sentenças abertas, uma vez que não são passíveis de interpretação.

Logo a alternativa “e” é a única sentença que expressa um pensamento de sentido completo que pode ser atribuído um valor lógico.

Resposta: E

- **(QUADRIX - Profissional Administrativo (CREFONO 1) /2020) Sabendo que p, q e r são três proposições, julgue o item.**

A frase “Que beleza!” é um exemplo de proposição.

Comentário:

Na frase “Que beleza!” não se pode atribuir um valor lógico V ou F importante lembrar que sentenças exclamativas não são consideradas proposições.

Resposta: Errado.

composta depende do julgamento que se faz de suas proposições componentes. Considerando os possíveis julgamentos V ou F das proposições A e B, tem-se a seguinte tabela-verdade para algumas proposições compostas.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\sim A$	$A \rightarrow B$
V	V	V	V	F	V
V	F	F	V		F
F	V	F	V	V	V
F	F	F	F		V

Considerando-se a proposição A, formada a partir das proposições B, C etc. mediante o emprego de conectivos (\wedge ou \vee), ou de modificador (\neg) ou de condicional (\rightarrow), diz-se que A é uma tautologia quando A tem valor lógico V, independentemente dos valores lógicos de B, C etc. e diz-se que A é uma contradição quando A tem valor lógico F, independentemente dos valores lógicos de B, C etc. Uma proposição A é equivalente a uma proposição B quando A e B têm as tabelas-verdade iguais, isto é, A e B têm sempre o mesmo valor lógico. Com base nas informações, julgue os itens a seguir.

- A proposição $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$ é uma tautologia.
- Em relação às proposições A: $\sqrt{16} = \pm 4$ e B: 9 é par, a proposição composta $A \rightarrow B$ é uma contradição.
- A proposição $A \rightarrow B$ é equivalente à proposição $\neg B \rightarrow \neg A$.

Gabarito

- | | |
|-------|----------------------|
| 1. E | 20. C |
| 2. B | 21. B |
| 3. D | 22. E, E, E, C, E, C |
| 4. C | 23. D |
| 5. D | 24. C |
| 6. C | 25. D |
| 7. C | 26. A |
| 8. C | 27. E |
| 9. C | 28. A |
| 10. C | 29. C |
| 11. E | 30. B |
| 12. E | 31. A |
| 13. E | 32. E, E, C, C, E |
| 14. E | 33. C, C, E, E, C |
| 15. E | 34. E |
| 16. B | 35. D |
| 17. B | 36. C, E, C |
| 18. E | |
| 19. C | |

Capítulo 4

Diagramas Lógicos

No estudo das operações com conjuntos e das soluções de problemas envolvendo conjuntos, os diagramas ajudam a visualizar e contribuem para a compreensão de vários assuntos em Lógica.

Gottlob Frege construiu uma maneira de reordenar várias sentenças para tornar sua forma lógica clara, com a intenção de mostrar como as sentenças relacionam-se em certos aspectos. Antes de Frege, a lógica formal não obteve sucesso além do nível da lógica de sentenças: ela podia representar a estrutura de sentenças compostas de outras sentenças, usando os conectivos lógicos: “e”, “ou” e “não”, mas não podia quebrar sentenças em partes menores. O trabalho de Frege foi um dos que deu início à lógica formal contemporânea. Sendo assim, percebemos a grande incidência de questões de concursos públicos voltadas para esta linguagem e raciocínio.

Um tipo especial de proposição são as **proposições categóricas**. Podemos identificá-las facilmente porque são precedidas pelos quantificadores lógicos: “Todo (\forall)”, “Nenhum ($\neg\exists$)”, “Algum (\exists)”. Na lógica clássica (também chamada de lógica aristotélica), o estudo da dedução era desenvolvido usando-se as proposições categóricas.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

Na linguagem falada ou escrita, o elemento primitivo é a sentença, ou proposição simples, formada basicamente por um sujeito e um predicado. Nessas considerações, estão incluídas apenas as proposições afirmativas ou negativas, excluindo, portanto, as proposições interrogativas, exclamativas etc. Só são consideradas proposições aquelas sentenças bem definidas, isto é, aquelas sobre as quais pode-se decidir serem verdadeiras (V) ou falsas (F). Toda proposição tem um valor lógico, ou uma valoração, V ou F, excluindo-se qualquer outro. As proposições serão designadas por letras maiúsculas A, B, C etc.

Há expressões às quais não se pode atribuir um valor lógico V ou F, por exemplo: “Ele é juiz do TRT da 5ª Região”, ou “ $x + 3 = 9$ ”. O sujeito é uma variável que pode ser substituído por um elemento arbitrário, transformando a expressão em uma proposição que pode ser valorada como V ou F. Expressões dessa forma são denominadas sentenças abertas, ou funções proposicionais.

Pode-se passar de uma sentença aberta a uma proposição por meio dos quantificadores “qualquer que seja”, ou “para todo”, indicado por \forall , e “existe”, indicado por \exists . Exemplo: a proposição $\forall(x)(x \in R)(x + 3 = 9)$ é valorada como F, enquanto a proposição $\exists(x)(x \in R)(x + 3 = 9)$ é valorada como V.

Exemplos:

“Todos os homens são mortais” se torna “Para todo x, se x é homem, então x é mortal.”, o que pode ser escrito simbolicamente como: $\forall x(H(x) \rightarrow M(x))$.

“Alguns homens são vegetarianos” se torna “Existe algum (ao menos um) x tal que x é homem e x é vegetariano”, o que pode ser escrito simbolicamente como: $\exists x(H(x) \wedge V(x))$.

As proposições categóricas podem ser universais ou particulares, cada uma destas subdividindo-se em afirmativa ou negativa. Temos, portanto, quatro proposições categóricas possíveis.

As quatro proposições categóricas possíveis, em suas formas típicas, são dadas no quadro seguinte:

	Proposições Afirmativas	Proposições Negativas
Proposições Universais	(A) Todo “A” é “B”	(E) Nenhum “A” é “B” Todo “A não é B”
Proposições Particulares	(I) Algum “A” é “B”	(O) Algum “A” não é “B” Nem todo A é B

Entre parênteses estão as vogais que representam quantificação.

Podemos observar no quadro acima que cada uma das proposições categóricas na forma típica começa por “**Todo**” ou “**Nenhum**” (chamados de quantificadores universais) ou por “**Algum**” (chamado de quantificador particular).

Sujeito e predicado de uma proposição categórica

Dada uma proposição categórica em sua forma típica chamamos:

Sujeito: elemento da sentença relacionado ao quantificador da proposição.

Predicado: elemento que se segue ao verbo.

Exemplo:

PROPOSIÇÕES CATEGÓRICAS	SUJEITO	PREDICADO
Todo estudante dedicado é bem-sucedido.	<i>estudante</i>	<i>bem-sucedido</i>
Nenhum animal é imortal.	<i>animal</i>	<i>imortal</i>
Algum atleta é artista.	<i>atleta</i>	<i>artista</i>
Algum policial é idôneo.	<i>policial</i>	<i>idôneo</i>

Exemplos:

Todo pássaro voa.

Alguns computadores travam.

Nenhuma mulher é feia.

1. Particular afirmativo: **Algum A é B**

Alguns termos que podem substituir a palavra “algum” nas provas de concursos públicos:

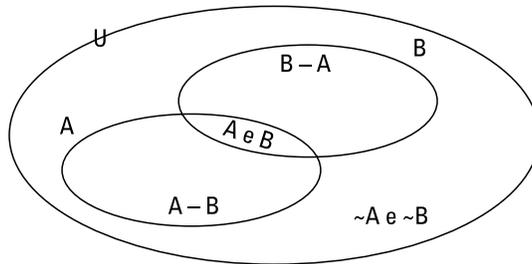
- Ao menos um
- Pelo menos um
- Existe
- Alguém

INTERSEÇÃO $(A \cap B) \neq \emptyset$
Conjunto unitário



O conjunto interseção é formado pelos elementos que pertencem aos conjuntos A e B simultaneamente.

$$(A \cap B) = \{x / x \in A \text{ e } x \in B\}$$



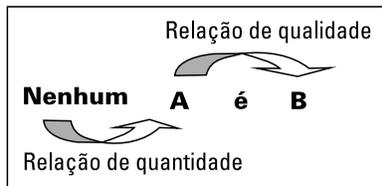
Simbolicamente: $\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \exists x (B(x) \wedge A(x))$

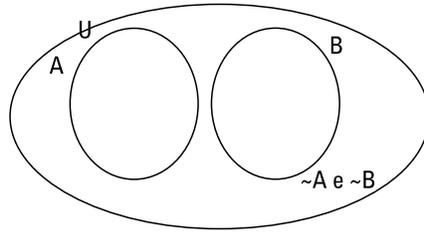
2. Universal negativo: **Nenhum A é B**

Conjuntos Disjuntos

O termo “nenhum” pode ser substituído pela palavra “não existe” nas provas de concursos públicos:

A e B são disjuntos se $A \cap B = \emptyset$
Conjunto vazio





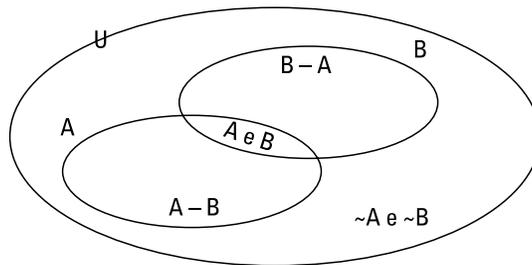
Simbolicamente: $\neg \exists x (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \neg \exists x (B(x) \wedge A(x))$

3. Particular negativo: **Algum A não é B**

Alguns termos que podem substituir a palavra “algum” nas provas de concursos públicos:

- Ao menos um
- Pelo menos um
- Existe
- Alguém

$A - B = \{x / x \in A \text{ e } x \notin B\}$
DIFERENÇA



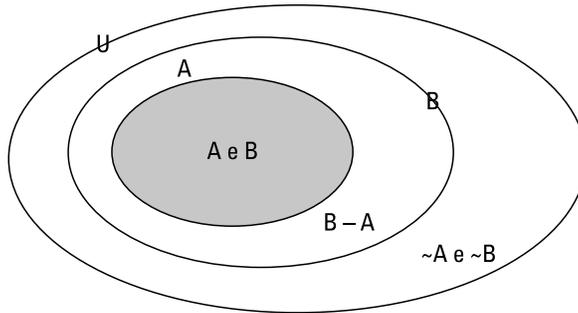
Simbolicamente: $\exists X (A(X) \wedge \neg B(X))$

4. Universal afirmativo: **Tudo A é B**

$A \cup B = B$ $A \cap B = A$
INCLUSÃO DE CONJUNTOS ($A \subset B$)

Alguns termos que podem substituir a palavra “todo” nas provas de concursos públicos:

- Para todo
- Qualquer que seja



Simbolicamente: $\forall(x) (A(x) \rightarrow B(x))$

Obs.: $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \neq \forall x(B(x) \rightarrow A(x))$ não possui a propriedade comutativa.

Linguagem (Simbologia) das Proposições Categóricas

As bancas têm cobrado dos candidatos um conhecimento mais amplo referente à simbologia e à escrita das proposições categóricas. Sendo assim, torna-se importante verificarmos algumas questões de concursos.

QUESTÃO DE APRENDIZAGEM

- **Considere-se que U seja o conjunto de todos os alunos, P(x) seja a propriedade “x é aluno dedicado”, Q(x) seja a propriedade “x tem disposição para estudar” e R(x) “x passa em concurso público”. Desse modo, escreva na linguagem da lógica formal, ou seja, simbolicamente.**
 - a) Todo aluno dedicado passa em concurso público.
 - b) Alguns alunos que têm disposição para estudar não são dedicados.
 - c) Nenhum aluno dedicado é disposto para estudar.
 - d) Todo aluno que tem disposição para estudar não passa em concurso público.
 - e) Existem alunos que passam em concurso público que são dedicados.
 - f) Todos alunos que são dedicados e têm disposição para estudar, passam em concurso público.

Gabarito:

- a) $\forall x(P(x) \rightarrow R(x))$
- b) $\exists x(Q(x) \wedge \neg P(x))$
- c) $\neg \exists x(P(x) \wedge Q(x))$
- d) $\forall x(Q(x) \rightarrow \neg R(x))$
- e) $\exists x(R(x) \wedge P(x))$
- f) $\forall x[(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow R(x)]$

QUESTÕES COMENTADAS

- **(Ano: 2020 / Banca: INSTITUTO AOCP Órgão: Prefeitura de Cariacica – ES Prova: Assistente de CMEI)**
Dizer que “Toda criança que se chama Miguel é comportada” é equivalente a dizer que
 - a) “Nenhuma criança que se chama Miguel é comportada”.
 - b) “Nenhuma criança que se chama Miguel não é comportada”.
 - c) “Toda criança que se chama Miguel não é comportada”.
 - d) “Toda criança que não se chama Miguel é comportada”.

Comentário:

A afirmativa é dada de forma que “Todo A é B”. A questão está pedindo a equivalência, e sabemos que a equivalência disso é “Nenhum A não é B”.

Logo, “Nenhuma criança que se chama Miguel não é comportada”.

Resposta: Letra B.

- **(Ano: 2019 / Banca: INSTITUTO AOCP Órgão: PC-ES Prova: Investigador)**
Dada a afirmação: “Todo político é corrupto.”, assinale a alternativa que seja uma afirmação logicamente equivalente.
 - a) “Todo corrupto é político”.
 - b) “Quem não é político não é corrupto”.
 - c) “Um homem é político ou é corrupto”.
 - d) “Um homem não é corrupto ou não é político”.
 - e) “Todos que não são corruptos não são políticos”.

Comentário:

A questão pede a alternativa que seja equivalente a “Todo político é corrupto”. Ora, isso é o mesmo que dizer: Se político então é corrupto.

Pela equivalência das condicionais a contrapositiva de $A \rightarrow B$ será $\sim B \rightarrow \sim A$. Logo, basta negar as duas proposições e inverter, ficando: Se não é corrupto então não é político.

Resposta: Letra E.

- **(Ano: 2016 / Banca: INSTITUTO AOCP Órgão: EBSEH Prova: Analista de Tecnologia da Informação - Suporte de Redes)**
A negação de “Todos os alunos vão gabaritar a prova de matemática” é
 - a) “Todos os alunos não vão gabaritar a prova de matemática”.
 - b) “Nenhum aluno vai gabaritar a prova de matemática”.
 - c) “Existe apenas um aluno que não vai gabaritar a prova de matemática”.
 - d) “Existe apenas um aluno que vai gabaritar a prova de matemática”.
 - e) “Existem alunos que não vão gabaritar a prova de matemática”.

Comentário:

Como vimos anteriormente, a negação de “Todo A é B” será “Algum A não é B”. Desta forma, a negação de “Todos os alunos vão gabaritar a prova de matemática” será “Existem alunos que não vão gabaritar a prova de matemática”.

Resposta: Letra E.