Sérgio CARVALHO
Weber CAMPOS

ESTATÍSTICA INFERENCIAL

Simplificada

2021

EDITORA JusPODIVM
www.editorajuspodivm.com.br

Capítulo 1
Probabilidade

1. Introdução

Já na infância as pessoas conhecem e experimentam o conceito de "sorte", o qual as acompanha ao longo de toda a vida. Assim, tem sorte quem ganha uma rifa no colégio, ou quem acerta uma questão de múltipla escolha na prova, tendo-a respondido aleatoriamente.

Com um pouco mais de elaboração, alguém pode questionar: "qual a chance que tenho de ganhar na loteria?"

Em socorro ao senso comum, vem a Matemática tratar da Probabilidade, dando-nos a conhecer que é de 20% a chance de um aluno – ou concurseiro – acertar a questão de múltipla escolha (com cinco alternativas), contra 80% de chance de errá-la.

Objeto do nosso estudo neste capítulo, a Probabilidade está certamente entre os assuntos mais instigantes da Matemática, e vem nos ensinar, com suas técnicas e nuances, a identificar matematicamente a chance de se obter determinado resultado em um experimento.

2. Conceitos Iniciais

A **Teoria da Probabilidade** faz uso de uma nomenclatura própria, de modo que há três conceitos fundamentais que temos que passar imediatamente a conhecer: **Experimento Aleatório**, **Espaço Amostral** e **Evento**.

Experimento Aleatório: é o experimento que mesmo repetido diversas vezes, sob as mesmas condições, pode apresentar resultados diferentes.

Exemplos de experimento aleatório:

→ lançar um dado e observar o resultado;

→ lançar duas moedas e observar o número de caras obtidas;

→ selecionar uma carta de um baralho de 52 cartas e observar seu naipe.

Espaço Amostral: é apenas o "conjunto dos resultados possíveis" de um Experimento Aleatório.

Designaremos o Espaço Amostral por "**S**"**.** Consideremos os exemplos abaixo, e determinemos os respectivos espaços amostrais:

a) lançar um dado, e observar a face de cima.
   S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
b) lançar duas moedas e observar as faces de cima.
   S = { (cara, cara); (cara, coroa); (coroa, cara); (coroa, coroa) }

Atenção: saber determinar qual o espaço amostral **S** de um experimento aleatório, e conhecer o número de elementos desse espaço amostral **n(S)** é meio caminho andado para acertarmos muitas questões de Probabilidade.

Como foi dito, designaremos o número de elementos de um espaço amostral por **n(S)**. Assim, repetindo alguns exemplos acima, teremos que:

→ lançar um dado, e observar a face de cima.

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} → E: **n(S)=6**

→ lançar duas moedas e observar as faces de cima.

S = {(cara, cara); (cara, coroa); (coroa, cara); (coroa, coroa)} → E: **n(S)=4**

Faremos mais alguns exemplos de determinação do tamanho do espaço amostral.

Exemplo 01: Para cada experimento aleatório abaixo, determinar o número de elementos do respectivo espaço amostral.

Experimento A) Lançar três moedas e observar os resultados.

Para sabermos o número de resultados possíveis para o lançamento de três moedas, podemos usar a técnica da Análise Combinatória chamada de Princípio Fundamental da Contagem.

Como para cada lançamento há duas possibilidades de resultado (cara ou coroa), teremos:

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow 1^{\circ} \text{ lançamento} \rightarrow 2 \text{ possibilidades} \\ \rightarrow 2^{\circ} \text{ lançamento} \rightarrow 2 \text{ possibilidades} \\ \rightarrow 3^{\circ} \text{ lançamento} \rightarrow 2 \text{ possibilidades} \end{array}\right\} 2x2x2=8 \rightarrow \text{Logo: } \mathbf{n(S)=8}$$

Experimento B) Escolher, entre um grupo de cinco pessoas (A, B, C, D, E), duas delas para formar uma comissão.

Neste caso, trabalharemos utilizando outra técnica da Análise Combinatória chamada de **Combinação**.

Teremos: $C_{5,2} = \dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{5\times 4\times 3!}{2\times 1\times 3!} = 10$

Logo: **n(S)=10**

Conclui-se neste último exemplo que a Análise Combinatória pode ser útil na determinação do número de elementos **n(S)** de um Espaço Amostral **(S)**.

O terceiro conceito essencial ao estudo da Probabilidade é o conceito de **Evento**.

EVENTO: consiste em um subconjunto do Espaço Amostral. Designaremos um evento por uma letra maiúscula.

Entendamos melhor por meio do exemplo abaixo:

→ Experimento Aleatório: lançar um dado e observar a face para cima.

- Espaço Amostral: **S**={1, 2, 3, 4, 5, 6} → **n(S)** = 6

- Evento A: obter um resultado par no lançamento do dado.

O conjunto do evento A será: **A = {2, 4, 6}** → **n(A)=3**

Se o resultado do lançamento do dado pertencer ao conjunto **A**, diremos que ocorreu o **evento A**.

Veja outros exemplos de eventos que se podem construir no experimento de lançar o dado:

- Evento B: obter um múltiplo de 3 no lançamento do dado.

O conjunto do evento B será: **B = {3, 6}** → **n(B)=2**

- Evento C: obter um resultado maior ou igual a 7 no lançamento do dado.

O conjunto do evento C será: **C = { }** (ou seja: vazio) → **n(C)=0**

Neste último exemplo, quando isso acontecer, estaremos diante de um "evento impossível".

Observemos nos exemplos acima que, para cada evento **X**, designamos por **n(X)** o número de elementos de cada evento!

Atenção: Para a determinação do número de elementos de um evento, dependendo do caso, poderemos também ter que lançar mão das técnicas de Análise Combinatória. Conhecer o **n(X)**, ou seja, o número de elementos de um evento que virá descrito no enunciado é o segundo passo para a resolução de algumas questões de probabilidade que resolveremos adiante.

A questão de Probabilidade trará em seu enunciado a descrição de um **experimento aleatório**, e a descrição de um **evento**. E perguntará: qual a **probabilidade** de ocorrência daquele evento?

3. Cálculo da Probabilidade

→ Fórmula da Probabilidade: a probabilidade de ocorrência de um evento "X", num determinado experimento aleatório, e considerando que cada elemento do espaço amostral desse experimento tem a mesma probabilidade de ocorrer, será calculada por:

$$P(X) = \frac{n(X)}{n(S)} = \frac{\text{número de resultados favoráveis ao evento X}}{\text{número de resultados possíveis}}$$

Onde: → **n(S)** é o número de elementos do espaço amostral do experimento; e

→ **n(X)** é o número de elementos do evento **X**.

Como está dito, a fórmula acima é aplicável quando os elementos do espaço amostral tiverem a mesma probabilidade. Por exemplo, podemos aplicar a fórmula acima num experimento de lançamento de uma moeda "honesta" (não viciada), pois as faces cara e coroa têm a mesma probabilidade de sorteio. No entanto, não podemos aplicar num experimento de lançamento de uma moeda "não honesta" (viciada), pois a probabilidade de sorteio de uma das faces é maior do que a da outra.

Exemplo 02: Em dois lançamentos de uma moeda "honesta", qual é a probabilidade de ocorrer exatamente 1 cara?

Solução: O espaço amostral desse experimento é: **S** = {(cara, cara); (cara, coroa); (coroa, cara); (coroa, coroa)}. Ou seja, **4** resultados possíveis.

Nesses quatro resultados, quantos têm exatamente 1 cara? Há dois resultados contendo exatamente 1 cara: (**cara**, coroa) e (coroa, **cara**). Logo, o número de resultados favoráveis é **2**.

A probabilidade é dada pela razão entre resultados favoráveis e possíveis:

→ P = 2/4 = 0,50 = 50% (Resposta!)

Exemplo 03: De um baralho de 52 cartas, duas são extraídas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de ambas serem de ouro?

Solução: Ora, o experimento consiste em retirar (sem reposição) duas cartas de um baralho.

Daí, o espaço amostral é formado por todas as 52 cartas do baralho. Como o enunciado falou em retirada "sem reposição", significa que as cartas a serem escolhidas têm que ser distintas entre si. Logo, caímos num caso de Arranjo ou de Combinação. Mas Arranjo ou Combinação?

Criemos um resultado possível: { 2_{OURO}, 5_{COPAS} }

Invertamos os elementos desse resultado: { 5_{COPAS}, 2_{OURO} }

É a mesma dupla de cartas? Sim. Logo, a ordem não é relevante e assim trabalharemos com **Combinação**.

Calcularemos $C_{52,2}$:

$$C_{52,2} = \frac{52!}{2!.(52-2)!} = \frac{52 \times 51 \times 50!}{2!.50!} = \frac{52 \times 51}{2} = 1236$$

E chegamos, pois, à nossa primeira conclusão: que **n(S)**=1326.

Definiremos agora o **evento** e seu respectivo número de elementos.

Ora, o evento (X) é a retirada de duas cartas de (naipe) **ouro.**

Logo, nosso "conjunto universo" de possibilidades agora será o seguinte:

{Aouro, 2ouro, 3ouro, 4ouro, 5ouro, 6ouro, 7ouro, 8ouro, 9ouro, 10ouro, Jouro, Qouro, Kouro}

Naturalmente, formaremos subconjuntos com duas cartas de ouro **distintas**, logo, caímos numa resolução de Arranjo ou de Combinação. É Combinação, pois a ordem entre as duas cartas não é relevante. Daí, teremos: $C_{13,2}$.

$$C_{13,2} = \frac{13!}{2!.11!} = \frac{13\times12\times11!}{2\,.\,11!} = \frac{13\times12}{2} = 78 \rightarrow \mathbf{n(X)}=78$$

Passemos à última etapa da solução, que consiste na aplicação da fórmula da Probabilidade:

$$\mathrm{P(X)} = \frac{\mathrm{n(X)}}{\mathrm{n(S)}} = \frac{\text{número de resultados favoráveis ao evento X}}{\text{número de resultados possíveis}}$$

Substituindo os resultados encontrados na fórmula, teremos:

$$\rightarrow \mathrm{P}(X) = \frac{78}{1326} = \frac{1}{17}\ \textbf{(Resposta!)}$$

Pelas resoluções dos últimos exemplos, traçaremos uma sequência padronizada de procedimentos que teremos que seguir para resolver as questões de probabilidade:

1º Passo) Trabalhar com o experimento aleatório, definindo o número de elementos do espaço amostral **n(S)**, isto é, o <u>número de resultados possíveis</u>;

2º Passo) Trabalhar com o evento, definindo o seu respectivo número de elementos **n(X)**, isto é, o <u>número de resultados favoráveis</u>;

3º Passo) Aplicar a fórmula da Probabilidade: $\mathrm{P}(X) = \dfrac{n(X)}{n(S)}$

Exemplo 04: Dois dados são lançados e observados os números das faces de cima. Qual a probabilidade de ocorrerem números iguais?

Solução: Novamente os três passos:

1º Passo) Definindo o experimento aleatório: lançar dois dados diferentes. Quantas sequências de resultados são possíveis?

Pelo "Princípio Fundamental da Contagem", teremos:

$$\left.\begin{array}{l}\rightarrow 1^{\circ}\text{ dado} \rightarrow 6\text{ possibilidades}\\ \rightarrow 2^{\circ}\text{ dado} \rightarrow 6\text{ possibilidades}\end{array}\right\}\ 6\text{x}6=36 \rightarrow \mathbf{n(S)=36}$$

2º Passo) Definição do evento: o enunciado exige que os resultados dos dois dados sejam iguais. É fácil constatar que as únicas possibilidades de isso acontecer seriam as seguintes: {1, 1} ou {2, 2} ou {3, 3} ou {4, 4} ou {5, 5} ou {6, 6}.

Só há, portanto, 6 (seis) resultados favoráveis para esse evento. Logo: **n(X)**=6.

3º Passo) Aplicando, finalmente, a fórmula da probabilidade, teremos que:

$$\rightarrow P(X) = \frac{n(X)}{n(S)} \rightarrow P(X) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0{,}167 = 16{,}7\% \text{ (Resposta!)}$$

Exemplo 05: Lançando-se 4 vezes uma moeda "honesta", qual é a probabilidade de que ocorra cara exatamente 3 vezes?

1º Passo) Definição do experimento aleatório: lançar quatro vezes uma moeda. Quantos são os resultados possíveis?

Pelo "Princípio Fundamental da Contagem", teremos:

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow 1^{\circ} \text{ lançamento} \rightarrow 2 \text{ possibilidades} \\ \rightarrow 2^{\circ} \text{ lançamento} \rightarrow 2 \text{ possibilidades} \\ \rightarrow 3^{\circ} \text{ lançamento} \rightarrow 2 \text{ possibilidades} \\ \rightarrow 4^{\circ} \text{ lançamento} \rightarrow 2 \text{ possibilidades} \end{array}\right\} 2x2x2x2=16 \rightarrow \mathbf{n(S)}=16$$

São, portanto, 16 resultados possíveis!

2º Passo) Definição do evento: o enunciado exige que **ocorra cara exatamente 3 vezes**.

Analisemos as possibilidades: chamaremos "K" o resultado "cara", e "C", o resultado "coroa". As únicas formações possíveis com três resultados "cara" são as seguintes:

$$\left.\begin{array}{l} K, K, K, C \\ K, K, C, K \\ K, C, K, K \\ C, K, K, K \end{array}\right\} \text{Ou seja: } \mathbf{n(X)}=4$$

São, portanto, 4 resultados favoráveis!

Poderíamos achar este mesmo resultado aplicando a fórmula da permutação com repetição.

3º Passo) Aplicando, finalmente, a fórmula da probabilidade, teremos que:

$$\rightarrow P(X) = \frac{n(X)}{n(S)} \rightarrow P(X) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\% \text{ (Resposta!)}$$

Exemplo 06: (CESPE 2017 SEDUC Alagoas) Acerca de probabilidade, julgue o próximo item.

1. Considere que de uma urna com 10 bolas numeradas de 1 a 10, uma pessoa deva retirar, aleatoriamente, duas bolas ao mesmo tempo. Nesse caso, a probabilidade de que seja 12 a soma dos números das bolas retiradas é superior a 9%.

Solução:

Inicialmente uma observação: para a Probabilidade, a retirada de duas bolas ao mesmo tempo é o mesmo que retirar uma bola de cada vez, mas sem reposição.

Vamos agora ao cálculo do número de resultados possíveis do experimento. Para obter essa quantidade é interessante utilizar alguma técnica da Análise Combinatória.

Os resultados possíveis são formados por dois números sorteados entre as bolas de 1 a 10, conforme mostrado abaixo:

Resultado: ______ ______

nº da 1ª bola nº da 2ª bola

Pelo Princípio Fundamental da Contagem (Princípio Multiplicativo), o número de resultados possíveis é calculado do seguinte modo:

→ há 10 possibilidades (bolas de 1 a 10) de números para a 1ª bola; e

→ há 9 (=10-1) possibilidades de números para a 2ª bola, pois o número da 2ª bola não pode ser o mesmo da 1ª bola.

O total de possibilidades é obtido pelo produto das possibilidades de cada etapa:

Nº de resultados possíveis = 10 x 9 = **90**

Agora passemos ao cálculo do número de resultados favoráveis. De acordo com a probabilidade expressa no enunciado, o resultado é favorável se a soma dos dois números é igual a 12. Vejamos todos os arranjos favoráveis à soma igual a 12:

1) 2 e 10; 2) 10 e 2; 3) 3 e 9; 4) 9 e 3; 5) 4 e 8; 6) 8 e 4; 7) 5 e 7; 8) 7 e 5

Temos, então, **8** resultados favoráveis.

A probabilidade é dada pela razão entre resultados favoráveis e possíveis:

→ **P = 8/90 = 0,088 = 8,8 %**

Portanto, o item está **ERRADO!**

4. Axiomas da Probabilidade

Destacamos os seguintes axiomas:

1 º) A Probabilidade de um evento é um valor entre 0 e 1.

$$0 \leq P(\text{evento } X) \leq 1$$

Assim, a probabilidade tem valor máximo de 1 (=100%). Neste caso (P=1), estaremos diante do chamado *evento certo*.

Por exemplo: qual a probabilidade de obtermos um valor menor que 7 no lançamento de um dado? Ora, trata-se de um evento certo. Há aqui uma "certeza matemática". A probabilidade será, portanto, de 1.

A ideia oposta ao do evento certo é a do *evento impossível*: aquele cuja probabilidade de ocorrência é de 0. Exemplo: qual a probabilidade de eu ganhar na loteria sem jogar? Nenhuma! Ou seja, P = 0.

2 º) A soma das probabilidades de cada elemento do espaço amostral é igual a 1.

Por exemplo, no caso do lançamento de um dado, teremos:

→ P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1

No caso do lançamento de uma moeda, teremos:

→ P(cara) + P(coroa) = 1

Exemplo 07: Três atletas competem numa pista de corrida. André tem 3 vezes mais probabilidade de vencer do que Mauro; este por sua vez, tem 2 vezes mais probabilidade de vencer do que Luís. Quais são as probabilidades de vitória de cada atleta?

Solução: O nosso espaço amostral (S), relativo ao vencedor da corrida, é dado por:

→ S = {Luís vence, Mauro vence, André vence}

Façamos P(Luís vencer)=x. Desta forma, teremos:

→ P(Mauro vencer) = 2x

→ P(André vencer) = 3.P(Mauro vencer) = 3 . 2x = 6x

A soma das probabilidades deve ser igual a 1. Daí:

→ x + 2x + 6x = 1

→ 9x = 1

→ x = 1/9

Logo, temos os seguintes resultados:

→ P(Luís vencer)= 1/9

→ P(Mauro vencer)= 2 . 1/9 = 2/9

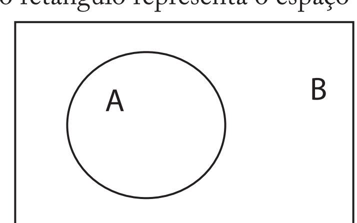
→ P(André vencer)= 6 . 1/9 = 6/9 = 2/3

3 º) A probabilidade de ocorrência de um evento X somada com a probabilidade de não ocorrência desse mesmo evento é igual a 1.

P(X ocorrer) + P(X não ocorrer) = 1

Dizemos que os eventos "X ocorrer" e "X não ocorrer" são **eventos complementares**. Portanto, a soma das probabilidades de eventos complementares é igual a 1.

Em termos de conjunto, dois eventos complementares A e B podem ser representados do seguinte modo (em que o retângulo representa o espaço amostral S):



O conjunto do evento A é representado por um círculo, e a região fora do círculo responde ao conjunto do evento B. Observe que $A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = S$ (espaço amostral).

Vejamos mais alguns exemplos de eventos complementares:

→ P(ganhar o jogo) + P(não ganhar o jogo) = 1

→ P(réu inocente) + P(réu culpado) = 1

→ P(cara) + P(coroa) = 1

→ P(par no dado) + P(ímpar no dado) = 1

→ P(máximo de 2 meninos) + P(mínimo de 3 meninos) = 1

→ P(nascer pelo menos 1 menina) + P(nascer nenhuma menina) = 1

Esta relação será utilizada muitas vezes nas soluções de questões de probabilidade. Através dela, podemos calcular a probabilidade de um evento ocorrer a partir da probabilidade do evento complementar.

Por exemplo, uma questão pede a probabilidade de ocorrer pelo menos uma cara no lançamento de três moedas: P(pelo menos 1 cara) = ?. Ora, é mais fácil calcular a probabilidade do evento complementar, ou seja, calcular P(nenhuma cara), pois desta forma só haverá uma situação favorável: (coroa, coroa, coroa). Calculada essa probabilidade, é só lançar o resultado na relação existente entre eventos complementares para encontrar a probabilidade da ocorrência do evento desejado na questão, neste caso:

→ P(pelo menos 1 cara) = 1 – P(nenhuma cara)

5. Probabilidade de Intersecção de Eventos – Regra do E: P(A e B)

Esta situação se verificará sempre que a questão solicitar a probabilidade de ocorrência conjunta de dois ou mais eventos, ou seja, eventos ligados pelo conectivo **E**. Por exemplo:

a) Qual a probabilidade de, ao retirarmos duas cartas de um baralho, obtermos um "ás" **E** um "valete"?

b) Qual a probabilidade de, ao retirarmos duas bolas de uma urna, obtermos duas bolas brancas? (Refere-se à situação: a 1ª é branca **E** a 2ª é branca.)

c) Qual a probabilidade de, entre os dois filhos (Rômulo e Remo) de um casal, somente o Rômulo seja aprovado no vestibular? (Refere-se à situação: o Rômulo é aprovado **E** o Remo é reprovado.)

O conectivo **E** aparece explicitamente apenas na probabilidade pedida no item (a). Nas demais probabilidades, embora o **E** não esteja explícito, tivemos condições de enxergá-lo e de fazê-lo aparecer.

Em termos de conjunto, o conectivo **E** significa i*ntersecção*! Trabalharemos, assim, com uma fórmula própria: a da *Probabilidade da Intersecção de Dois Eventos*, ou, simplesmente, a *regra do E*.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. (CESPE 2017 PM/Maranhão) Uma operação policial será realizada com uma equipe de seis agentes, que têm prenomes distintos, entre eles André, Bruno e Caio. Um agente será o coordenador da operação e outro, o assistente deste; ambos ficarão na base móvel de operações nas proximidades do local de realização da operação. Nessa operação, um agente se infiltrará, disfarçado, entre os suspeitos, em reunião por estes marcada em uma casa noturna, e outros três agentes, também disfarçados, entrarão na casa noturna para prestar apoio ao infiltrado, caso seja necessário.

A respeito dessa situação hipotética, julgue o item seguinte.

1. Se os dois agentes que ficarão na base móvel forem escolhidos aleatoriamente, a probabilidade de André e Bruno serem os escolhidos será superior a 30%. E

Solução:

A formação da equipe de seis agentes que realizará a operação policial se dará do seguinte modo:

Equipe: ________ ________ ________ | ________ ________ ________ |

Coord. Assist. Infiltrado Apoio

Pelo princípio fundamental da contagem (**PFC**), vamos calcular o número de resultados possíveis para a formação com os seis agentes:

→ para a função de coordenador há **6** possibilidades;

→ para a função de assistente há **5** (=6–1) possibilidades;

→ para a função de infiltrado há **4** (=6–2) possibilidades;

→ para o apoio há apenas **1** possibilidade, formado pelos três agentes que restaram.

O total de possibilidades é obtido pelo produto das possibilidades de cada etapa:

Nº de resultados possíveis = 6 x 5 x 4 x 1 = **120**

Agora passemos ao cálculo do número de resultados favoráveis. De acordo com a probabilidade expressa no item 1, o resultado é favorável se André e Bruno estiverem na base móvel (um como Coordenador e o outro como Assistente). Vamos fazer o desenho dessa situação:

André e **Bruno**

Equipe: ________ ________ ________ | ________ ________ ________ |

Coord. Assist. Infiltrado Apoio

Vamos novamente utilizar o PFC:

→ André e Bruno podem permutar entre as funções de Coordenador e Assistente, assim há **2** (=2!) possibilidades;

→ para a função de infiltrado há **4** (=6–2) possibilidades;

→ para a função de apoio há **1** possibilidade, formado pelos três agentes que restaram.

O total de possibilidades é obtido pelo produto das possibilidades de cada etapa:

Nº de resultados favoráveis = 2 x 4 x 1 = **8**

A probabilidade é dada pela razão entre resultados favoráveis e possíveis:

→ **P = 8/120 = 1/15 = 100/15 % = 20/3 % = 6,67 %**

Portanto, o item está **ERRADO!**

02. **(ESAF) Ao se jogar um determinado dado viciado, a probabilidade de sair o número 6 é de 20%, enquanto as probabilidades de sair qualquer outro número são iguais entre si. Ao se jogar este dado duas vezes, qual o valor mais próximo da probabilidade de um número par sair duas vezes?**

a) 20%
b) 27%
c) 25%
d) 23%
e) 50%

Solução:

A probabilidade de sair o número 6 é de 20%. Vamos chamar de **x** a probabilidade de sair qualquer outro número do dado. Desta forma, teremos as seguintes probabilidades para os números do dado:

P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = **x**

P(6) = 20% = 0,2

A soma das probabilidades de todos os números do dado tem que ser igual a **1**, ou seja:

P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = **1**

Vamos substituir as probabilidades P(1) a P(5) por x, e a P(6) por 0,2:

x + x + x + x + x + 0,2 = **1**

Resolvendo, vem:

5x + 0,2 = 1 → 5x = 0,8 → x = 0,8/5 → **x = 0,16**

Pronto! Encontramos as probabilidades dos números do dado.

Passemos ao cálculo da probabilidade pedida na questão. Na linguagem da probabilidade a questão quer:

P(par e par) = ?

Você acha que o primeiro lançamento do dado influenciará no resultado do segundo lançamento? É claro que não! Assim, os dois lançamentos são independentes! Desta forma, podemos separar a probabilidade acima num produto de probabilidades:

P(par) x P(par) = ?

O resultado no dado é par, quando ocorre um dos seguintes números: 2, 4 ou 6. Portanto, a probabilidade do resultado par no dado será obtida pela soma das probabilidades desses números:

P(par) = P(2) + P(4) + P(6)

P(par) = 0,16 + 0,16 + 0,2 = **0,52**

Daí:

P(par) x P(par) = 0,52 x 0,52 **= 0,2704 ≅ 27%**

Resposta: Alternativa B!

03. **(ESAF) Os registros mostram que a probabilidade de um vendedor fazer uma venda em uma visita a um cliente potencial é 0,4. Supondo que as decisões de compra dos clientes são eventos independentes, então a probabilidade de que o vendedor faça no mínimo uma venda em três visitas é igual a:**

a) 0,624
b) 0,064
c) 0,216
d) 0,568
e) 0,784

Solução:

A questão solicita a probabilidade de que **o vendedor faça no mínimo uma venda em três visitas**. A melhor maneira de obtermos o resultado dessa probabilidade é calculando a probabilidade do **evento complementar** (é a negação do evento dado).

A negação do evento: **o vendedor faça no mínimo uma venda em três visitas** é o evento complementar: **o vendedor não faça nenhuma venda em três visitas.**

Da relação entre as probabilidades de eventos complementares, teremos:

P(no mínimo uma venda) = 1 – P(nenhuma venda)

Daí, se encontrarmos a probabilidade do evento complementar, automaticamente encontraremos a probabilidade solicitada na questão.

Passemos ao cálculo da probabilidade: **P(nenhuma venda)**.

Considere que os três clientes sejam: A, B e C. Dessa forma, a probabilidade **P(nenhuma venda)** é igual a:

P(não vender p/ A e não vender p/ B e não vender p/ C)

Como foi dito na questão que as decisões de compra dos clientes são independentes, então essa probabilidade pode ser transformada no produto de três probabilidades, ou seja:

P(nenhuma venda) = P(não vender p/ A) x P(não vender p/ B) x P(não vender p/ C)

Segundo o enunciado, a probabilidade de venda a um cliente é **0,4**. Sendo assim, a probabilidade de **não vender** a um cliente será **0,6** (=1 – 0,4).

Substituiremos esse resultado na expressão de probabilidade acima:

P(nenhuma venda) = **0,6** x **0,6** x **0,6**

Resolvendo, vem:

P(nenhuma venda) = **0,216**

Embora esse resultado apareça entre as opções de resposta, ele não é a resposta da questão. A probabilidade acima é a do evento complementar, que utilizaremos para encontrar a probabilidade solicitada. Teremos:

P(no mínimo uma venda) = 1 – P(nenhuma venda)

P(no mínimo uma venda) = 1 – 0,216 = **0,784 (Resposta!)**

04. **(ESAF) André está realizando um teste de múltipla escolha, em que cada questão apresenta 5 alternativas, sendo uma e apenas uma correta. Se André sabe resolver a questão, ele marca a resposta certa. Se ele não sabe, ele marca aleatoriamente uma das alternativas. André sabe 60% das questões do teste. Então, a probabilidade de ele acertar uma questão qualquer do teste (isto é, de uma questão escolhida ao acaso) é igual a:**

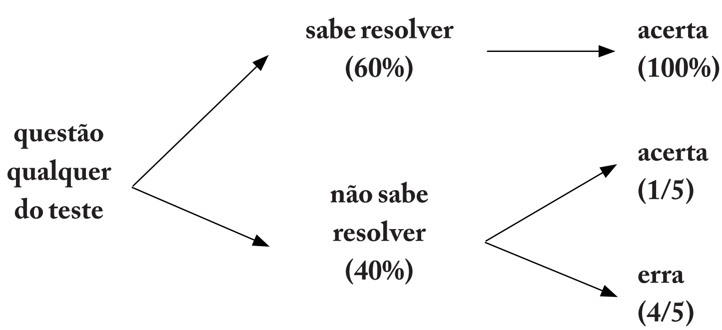
a) 0,62
b) 0,60
c) 0,68
d) 0,80
e) 0,56

Solução:

O André ao tentar resolver as questões do teste, ele poderá saber resolver ou não as questões! Se ele sabe, é claro que acertará a questão; se ele não sabe, ainda poderá acertar a questão chutando uma das cinco alternativas, com probabilidade de acerto de **(1/5)**.

Veja que nesta questão podemos traçar mais de um caminho (sabe a questão e acerta; não sabe a questão e acerta;...). Logo, podemos utilizar a *árvore de probabilidades* para traçar os possíveis caminhos para nos ajudar a chegar a resposta da questão.

Nossa *árvore* com as probabilidades fornecidas no enunciado:



A pergunta da questão é: **Qual é a probabilidade de ele acertar uma questão qualquer do teste?**

Há dois caminhos que nos conduzem a esse resultado **acertar uma questão**. No esquema abaixo, destacamos esses dois caminhos na cor azul, e já calculamos a probabilidade de cada um deles. Vejamos:

EXERCÍCIOS

01. **(FCC 2019 Banrisul Escriturário) Em uma cidade, 80% das famílias têm televisão e 35% têm microcomputador. Sabe-se que 90% das famílias têm pelo menos um desses aparelhos. Se uma família for escolhida aleatoriamente, a probabilidade de ela ter ambos os aparelhos é igual a**

a) 30%
b) 25%
c) 10%
d) 20%
e) 15%

02. **(FCC 2019 Prefeitura de Recife Analista Adm) Em um censo realizado em uma cidade em que são consumidos somente os sabonetes de marca X, Y e Z, verifica-se que:**

I. 40% consomem X.
II. 40% consomem Y.
III. 47% consomem Z.
IV. 15% consomem X e Y.
V. 5% consomem X e Z.
VI. 10% consomem Y e Z.
VII. qualquer elemento da população consome pelo menos uma marca de sabonete.

Então, escolhendo aleatoriamente um elemento dessa população, a probabilidade de ele consumir uma e somente uma marca de sabonete é igual a

a) 79%.
b) 70%
c) 60%
d) 80%.
e) 76%

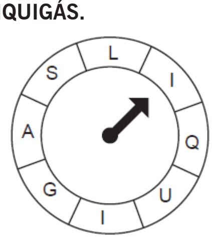
03. **(ESAF 2012 ATA/MF) Sorteando-se um número de uma lista de 1 a 100, qual a probabilidade de o número ser divisível por 3 ou por 8?**

a) 41%
b) 44%
c) 42%
d) 45%
e) 43%

04. **(ESAF 2013 DNIT) Dois dados de seis faces são lançados simultaneamente, e os números das faces voltadas para cima são somados. A probabilidade da soma obtida ser menor do que cinco ou igual a dez é igual a:**

a) 35%
b) 20%
c) 30%
d) 15%
e) 25%

05. **(Cesgranrio 2018 Liquigás) A Figura a seguir mostra um jogo eletrônico no qual, a cada jogada, a seta, após ser girada, para, aleatoriamente e com igual probabilidade, em qualquer uma das oito casas com as letras da palavra LIQUIGÁS.**



Um jogador só é vencedor se, em duas jogadas consecutivas, a seta apontar para letras iguais. A probabilidade de um jogador ser vencedor, fazendo apenas duas jogadas, é igual a

a) 4/64
b) 8/64
c) 10/64
d) 14/64
e) 16/64

06. (FCC 2018 ALESE Técnico Legislativo) Segundo a previsão do tempo, a probabilidade de chuva em uma cidade é de 50% no sábado e 30% no domingo. Além disso, ela informa que há 20% de probabilidade de que chova tanto no sábado quanto no domingo. De acordo com essa previsão, a probabilidade de que haja chuva nessa cidade em pelo menos um dos dois dias do final de semana é igual a

a) 100%
b) 80%.
c) 70%.
d) 60%.
e) 50%.

07. (FCC 2019 SEFAZ-BA Auditor Fiscal) Uma sala contém 20 homens e 30 mulheres em que todos são funcionários de uma empresa. Verifica-se que metade desses homens e metade dessas mulheres possuem nível superior. Escolhendo aleatoriamente uma pessoa dessa sala para realizar uma tarefa, a probabilidade de ela ser mulher ou possuir nível superior é igual a

a) 2/3.
b) 3/10.
c) 5/6.
d) 3/4.
e) 4/5.

08. (FCC 2016 SEFAZ-MA Auditor-Fiscal da Receita Estadual) Roberta tem que ler dois processos diferentes e dar, em cada um, parecer favorável ou desfavorável. A probabilidade de Roberta dar parecer favorável ao primeiro processo é de 50%, a de dar parecer favorável ao segundo é de 40%, e a de dar parecer favorável a ambos os processos é de 30%. Sendo assim, a probabilidade de que Roberta dê pareceres desfavoráveis a ambos os processos é igual a

a) 20%.
b) 40%.
c) 60%.
d) 30%.
e) 50%.

09. (FCC 2016 Auditor Fiscal da Receita Municipal de Teresina) Em uma repartição pública os processos que chegam para análise e deferimento são distribuídos com igual probabilidade para 4 auditores: A, B, C e D. Sabe-se que as probabilidades dos auditores A, B, C e D não deferirem um processo são dadas, respectivamente, por 30%, 35%, 22% e 33%. Nessas condições, a probabilidade de um processo, escolhido ao acaso, ser deferido é igual a

a) 65%.
b) 60%.
c) 70%.
d) 72%.
e) 75%.

10. (FCC 2019 Banrisul Escriturário) Seja P(X) a probabilidade de ocorrência de um evento X. Dados 2 eventos A e B, a probabilidade de ocorrer pelo menos um dos dois eventos é igual a 4/5 e a probabilidade de ocorrer o evento A e o evento B é igual a 1/10. Se P(A) é igual a 1/2, então P(B) é igual a

a) 1/4.
b) 2/5.
c) 3/10.
d) 1/3.
e) 1/2.

11. **(FGV 2017 Prefeitura de Salvador – Técnico de Nível Superior) Abel tem uma moeda que dá "cara" com probabilidade 1/2 e Breno tem uma moeda que dá "cara" com probabilidade 1/3. Abel e Breno lançam suas respectivas moedas, alternadamente. O primeiro que obtiver "cara", ganha. Abel é o primeiro a lançar, e os lançamentos são todos independentes. A probabilidade de Abel ganhar no seu terceiro lançamento é de**
   a) 1/2
   b) 1/3
   c) 1/4
   d) 1/8
   e) 1/18

12. **(FGV 2017 SEPOG-RO Analista) Para uma premiação, dois funcionários de uma empresa serão sorteados aleatoriamente entre quatro candidatos: dois do departamento A e dois do departamento B. A probabilidade de os dois funcionários sorteados pertencerem ao mesmo departamento é**
   a) 1/2.
   b) 1/3
   c) 1/4.
   d) 1/6.
   e) 3/4.

13. **(FGV 2018 SEFIN-RO Técnico Tributário) Júlia e Laura são irmãs e fazem parte de um grupo de 5 meninas. Desse grupo, três serão sorteadas para um passeio. A probabilidade de que uma das irmãs seja sorteada e a outra não seja sorteada é de**
   a) 40%.
   b) 50%.
   c) 60%.
   d) 70%.
   e) 80%.

14. **(FCC 2018 SEMFAZ São Luís-MA Auditor Fiscal) As 6 vagas da garagem de um pequeno edifício recém-construído serão sorteadas entre os proprietários dos 6 apartamentos, de modo que cada apartamento terá direito a uma vaga. As vagas ficam localizadas lado a lado ao longo de uma parede. Dois irmãos, proprietários dos apartamentos 1 e 2, gostariam que suas vagas ficassem localizadas lado a lado. A probabilidade de que isso aconteça é igual a**
   a) 1/2
   b) 1/3
   c) 1/4
   d) 1/5
   e) 1/6

15. **(FGV 2015 Secretaria Municipal de Fazenda de Niterói) Uma urna contém apenas bolas brancas e bolas pretas. São vinte bolas ao todo e a probabilidade de uma bola retirada aleatoriamente da urna ser branca é 1/5. Duas bolas são retiradas da urna sucessivamente e sem reposição. A probabilidade de as duas bolas retiradas serem pretas é:**
   a) 16/25
   b) 16/19
   c) 12/19
   d) 4/5
   e) 3/5

16. **(ESAF 2012 ATRFB) O Ministério da Fazenda pretende selecionar ao acaso 3 analistas para executar um trabalho na área de tributos. Esses 3 analistas serão selecionados de um grupo composto por 6 homens e 4 mulheres. A probabilidade de os 3 analistas serem do mesmo sexo é igual a**
   a) 40%.
   b) 50%.
   c) 30%.
   d) 20%.
   e) 60%.

Capítulo 10
Teste Qui-Quadrado

1. Introdução

Os procedimentos apresentados neste capítulo se relacionam todos com a comparação de frequências observadas numa amostra com frequências esperadas, de certas categorias. Esses procedimentos são considerados como testes de hipóteses.

A estatística de teste que será utilizada nos testes de hipóteses segue uma distribuição qui-quadrado. É por essa razão que chamamos os testes que serão realizados de Teste Qui-Quadrado.

Os testes Qui-quadrado são utilizados nos "Testes de Independência" entre duas variáveis e nos "Testes de Adequação do Ajustamento", conforme veremos adiante.

2. Distribuição Qui-Quadrado

Suponha as variáveis normais reduzidas ($Z_1, Z_2, Z_3, ..., Z_n$). Todas essas variáveis têm a mesma distribuição normal de média zero e desvio padrão unitário.

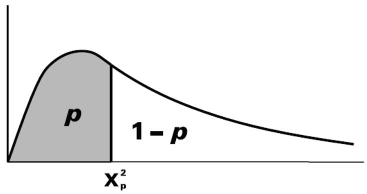
Considere a variável χ^2 sendo igual a soma dos quadrados das n variáveis normais reduzidas ($Z_1, Z_2, Z_3, ..., Z_n$), ou seja:

$$\chi 2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$

Pode-se afirmar que a variável χ^2 tem distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade. Portanto, lembre-se sempre de que a variável qui-quadrado χ^2 é uma soma de quadrados de variáveis normais reduzidas.

Do mesmo modo que a distribuição Normal Reduzida e a t de Student, a distribuição qui-quadrado tem uma tabela específica. Veja abaixo uma tabela que veio numa prova de concurso.

Tabela do Qui-quadrado



Valores dos Percentis χ_p^2 para a distribuição Qui-Quadrado com v graus de liberdade.

v	$x^2_{,005}$	$x^2_{,01}$	$x^2_{,025}$	$x^2_{,05}$	$x^2_{,10}$	$x^2_{,25}$	$x^2_{,50}$	$x^2_{,75}$	$x^2_{,90}$	$x^2_{,95}$	$x^2_{,975}$	$x^2_{,99}$
1	,0000	,0002	,0010	,0039	,0158	,102	,455	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63
2	,0100	,0201	,0506	,103	,211	,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21
3	,0717	,115	,216	,352	,584	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3
4	,207	,297	,484	,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
20	7,43	8,26	9,59	10,8	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	16,3	20,3	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	17,2	21,3	26,0	30,8	33,9	36,8	40,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	18,1	22,3	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	19,0	23,3	28,2	33,2	36,4	39,4	43,0
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	19,9	24,3	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3

Esta tabela dá os valores dos qui-quadrados χ_p^2 (valores do miolo da tabela) que correspondem a uma área *p* (valores no cabeçalho da tabela) indicada na figura e a um número específico de graus de liberdade (primeira coluna da tabela). A consulta a esta tabela se assemelha àquela feita na tabela da distribuição t de Student.

Observe que a cauda à direita não é limitada, segue para $+\infty$, enquanto a cauda à esquerda não prossegue para o lado negativo, uma vez que o qui-quadrado é uma soma de quadrados.

Exemplo 01: (CLÁSSICA) Sejam n variáveis aleatórias N(0,1) independentes. A soma de seus quadrados tem uma distribuição de:

a) t de Student com n-1 graus de liberdade
b) t de Student com n graus de liberdade
c) qui-quadrado com n graus de liberdade
d) qui-quadrado com 2n graus de liberdade
e) F com 1 grau de liberdade no numerador e n graus de liberdade no denominador.

Solução:

Na simbologia N(0,1), o N significa variável Normal, o primeiro número é o valor da média e o segundo número é o valor da variância. Portanto, essas variáveis aleatórias são variáveis normais reduzidas.

Sabemos que a soma dos quadrados de n variáveis normais reduzidas tem uma distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade.

Resposta: **Alternativa C**.

3. Teste Qui-Quadrado

O Teste Qui-Quadrado tem passos semelhantes aos realizados no Teste de Hipóteses. Compare esses dois testes.

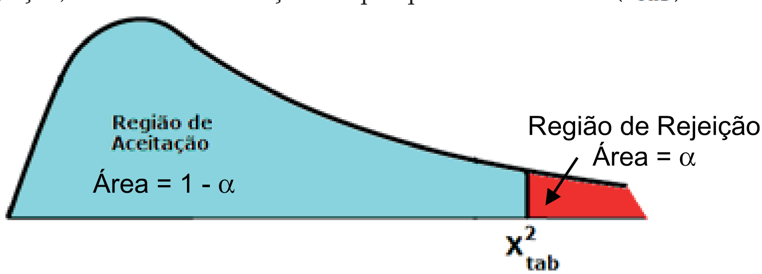
Segue a descrição dos passos do Teste Qui-Quadrado:

1º passo) Definição das Hipóteses

De forma simples, a hipótese nula (H_0) será uma igualdade entre as frequências observadas na amostra (O_i) e as frequências esperadas (E_i). Enquanto a hipótese alternativa (H_1), que se deve contrapor à H_0, será a diferença entre essas frequências.

$$\begin{cases} H_0: O_i = E_i \\ H_1: O_i \neq E_i \end{cases}$$

2º passo) Desenho da curva do qui-quadrado com a delimitação das regiões de aceitação e rejeição, e também a obtenção do qui-quadrado tabelado (χ^2_{tab}).



O Teste Qui-Quadrado será sempre um *teste unilateral à direita*. Portanto, à direita do Qui-Quadrado tabelado (χ^2_{tab}) se encontra a região de rejeição (com área igual ao nível de significância do teste: α) e à esquerda, a região de aceitação (com área igual a 100% - α).

Para consultar a tabela do qui-quadrado, e assim obter o valor do χ^2_{tab}, é necessário saber o nível de significância do teste (α) e o número de graus de liberdade.

3º passo) Cálculo da estatística de teste do qui-quadrado, conhecido por qui-quadrado calculado (χ^2_{calc}) e também por qui-quadrado observado (χ^2_o)

Anexo 1
Resumão da Obra

A Estatística é marcada pela presença de muitos conceitos, fórmulas, propriedades e regras, assim resolvemos destacar esse conteúdo de cada capítulo a fim de facilitar a memorização e ser utilizado em pesquisas rápidas.

Resumo do Capítulo 01 – Probabilidade

Fórmula Básica da Probabilidade:

$$P(X) = \frac{\text{nº de resultados favoráveis ao evento X}}{\text{nº de resultados possíveis}}$$

Axiomas de Probabilidade:

1º) $0 \leq P(X) \leq 1$

2º) P(X ocorrer) + P(X não ocorrer) = 1

3º) A soma das probabilidades de cada elemento do espaço amostral é igual a 1

Regra do "E": P(A e B) = P(A) x P(B|A)

Regra do "OU": P(A ou B) = P(A) + P(B) – P(A e B)

– "A e B são eventos independentes se, e somente se, ocorrer P(A e B)=P(A)xP(B)".

– "A, B e C são eventos independentes se, e somente se, ocorrerem:

P(A e B e C)=P(A)xP(B)xP(C); P(A e B)=P(A)xP(B); P(A e C)=P(A)xP(C); P(B e C)=P(B)xP(C)".

Eventos Independentes: P(B|A) = P(B); P(A|B) = P(A); P(A e B)=P(A)xP(B)

Eventos Mutuamente Exclusivos: P(A|B)=0; P(B|A)=0; P(A e B)=0; P(A ou B)=P(A)+P(B)

Eventos Complementares: P(A|B)=0; P(B|A)=0; P(A e B)=0; P(A ou B)=1

Probabilidade Condicional:

1ª forma de resolver) Por meio da fórmula:

$$P(A|B) = \frac{\text{P(A e B)}}{P(B)}$$

2ª forma de resolver) Aplica-se a redução do conjunto universo, em seguida usa-se a fórmula:

$$P = \frac{\text{nº de resultados favoráveis}}{\text{nº de resultados possíveis}}$$

Resumo do Capítulo 02 – Distribuições Discretas de Probabilidade

Distribuição Uniforme Discreta

Todos os elementos têm a mesma probabilidade de ocorrer. Assim, a média e a variância são calculadas mediante as fórmulas tradicionais da Média Aritmética e da Variância:

$$média = \frac{\sum x_i}{n} \quad e \quad variância = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Distribuição de Bernoulli

A variável aleatória de Bernoulli **X** é definida como o número de sucessos obtidos em 1 tentativa, com probabilidade de sucesso igual a **p**. Assim, a variável X pode assumir os valores: X=0 ou X=1. A probabilidade P(X=1) = p e a probabilidade P(X=0) = 1–p = q. A média e a variância de uma variável aleatória de Bernoulli são dadas por:

Média = p e Variância = p.q

Distribuição Binomial

Para ser binomial, deve-se atender aos seguintes requisitos:

1) Trata-se de um experimento que se repetirá n vezes.
2) Este experimento só admite dois resultados: *sucesso* e *fracasso*.
3) A cada repetição do experimento, as probabilidades de *sucesso* p e de *fracasso* q se mantêm constantes.

$$P(S\ sucessos) = C_{n,S} \times (p)^S \times (q)^F$$

S + F = n (A soma do nº de sucessos e de fracassos é igual ao total de tentativas)

p + q = 1 (A soma das probabilidades de sucesso e de fracasso é igual a 1)

A variável binomial X pode assumir os valores: X = 0, 1, 2, 3,..., n. A média e a variância de uma variável aleatória binomial são:

Média = n.p e Variância = n.p.q

Distribuição Multinomial

A probabilidade a seguir foi montada para o caso de seis resultados possíveis num experimento aleatório (por exemplo, um dado com seis faces). A fórmula para outra quantidade de resultados é similar.

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{n!}{x_1!\ x_2!\ x_3!\ x_4!\ x_5!\ x_6!} \cdot {p_1}^{x_1} \cdot {p_2}^{x_2} \cdot {p_3}^{x_3} \cdot {p_4}^{x_4} \cdot {p_5}^{x_5} \cdot {p_6}^{x_6}$$

As designações x_1, $x_{2,}$ x_3... são as quantidades de repetições para cada um dos resultados. Enquanto p_1, $p_{2,}$ p_3... são as correspondentes probabilidades para cada resultado.

Distribuição Hipergeométrica

A distribuição hipergeométrica é similar a distribuição binomial (n tentativas e 2 resultados possíveis), mas usada em retiradas sem reposição.

$$P(S\ sucessos) = \frac{C_{m,S} \times C_{N-m,n-S}}{C_{N,n}}$$

N = quantidade total de elementos.

n = número de sorteios (ou retiradas aleatórias).

S = quantidade desejada de repetição do elemento especificado nos n sorteios.

m = número de ocorrências do elemento especificado na totalidade.

Distribuição Geométrica

A distribuição geométrica tem interesse na probabilidade de que o sucesso ocorra na k-ésima jogada. A forma geral da função de probabilidade:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}.p\ ,\ k = 1, 2, 3, 4, 5, 6...$$

E a variável aleatória geométrica X é definida como o número de ensaios (partidas, sorteios, lançamentos) de Bernoulli necessários até obter o primeiro sucesso.

Alguns livros e provas de concurso consideram a variável aleatória X como sendo o número de ensaios de Bernoulli <u>antes</u> de obter o primeiro sucesso. Desse modo, a função de probabilidade e o valor da variável X serão os seguintes:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k}.p\ ,\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5...$$

A variável Geométrica X tem média e variância iguais a:

$$\text{Média} = 1/p \text{ e Var} = (1 - p)/p^2$$

Distribuição de Poisson

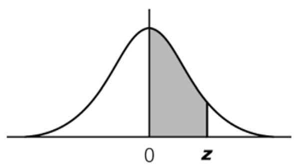
$$P(x) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!}$$

– x é o número de ocorrências no intervalo;

– P(x) é a probabilidade de x ocorrências no intervalo;

Anexo 2
Tabelas Estatísticas

1. Tabela Normal Padrão



Área sob a Curva Normal Padronizada de 0 a z

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	,0000	,0040	,0080	,0120	,0160	,0199	,0239	,0279	,0319	,0359
0,1	,0398	,0438	,0478	,0517	,0557	,0596	,0636	,6750	,0714	,0754
0,2	,0793	,0832	,0871	,0910	,0948	,0987	,1026	,1064	,1103	,1141
0,3	,1179	,1217	,1255	,1293	,1331	,1368	,1406	,1443	,1480	,1517
0,4	,1554	,1591	,1628	,1664	,1700	,1736	,1772	,1808	,1844	,1879
0,5	,1915	,1950	,1985	,2019	,2054	,2088	,2123	,2157	,2190	,2224
0,6	,2258	,2291	,2324	,2357	,2389	,2422	,2454	,2486	,2518	,2549
0,7	,2580	,2612	,2642	,2673	,2704	,2734	,2764	,2794	,2823	,2852
0,8	,2881	,2910	,2939	,2967	,2996	,3023	,3051	,3078	,3106	,3133
0,9	,3159	,3186	,3212	,3238	,3264	,3289	,3315	,3340	,3365	,3389
1,0	,3413	,3438	,3461	,3485	,3508	,3531	,3554	,3577	,3599	,3621
1,1	,3643	,3665	,3686	,3708	,3729	,3749	,3770	,3790	,3810	,3830
1,2	,3849	,3869	,3888	,3907	,3925	,3944	,3962	,3980	,3997	,4015
1,3	,4032	,4049	,4066	,4082	,4099	,4115	,4131	,4147	,4162	,4177
1,4	,4192	,4207	,4222	,4236	,4251	,4265	,4279	,4292	,4306	,4319
1,5	,4332	,4345	,4357	,4370	,4382	,4394	,4406	,4418	,4429	,4441
1,6	,4452	,4463	,4474	,4484	,4495	,4505	,4515	,4525	,4535	,4545
1,7	,4554	,4564	,4573	,4582	,4591	,4599	,4608	,4616	,4625	,4633
1,8	,4641	,4649	,4656	,4664	,4671	,4678	,4686	,4693	,4699	,4706
1,9	,4713	,4719	,4726	,4732	,4738	,4744	,4750	,4756	,4761	,4767
2,0	,4772	,4778	,4783	,4788	,4793	,4798	,4803	,4808	,4812	,4817
2,1	,4821	,4826	,4830	,4834	,4838	,4842	,4846	,4850	,4854	,4857
2,2	,4861	,4864	,4868	,4871	,4875	,4878	,4881	,4884	,4887	,4890
2,3	,4893	,4896	,4898	,4901	,4904	,4906	,4909	,4911	,4913	,4916
2,4	,4918	,4920	,4922	,4925	,4927	,4929	,4931	,4932	,4934	,4936
2,5	,4938	,4940	,4941	,4943	,4945	,4946	,4948	,4949	,4951	,4952
2,6	,4953	,4955	,4956	,4957	,4959	,4960	,4961	,4962	,4963	,4964
2,7	,4965	,4966	,4967	,4968	,4969	,4970	,4971	,4972	,4973	,4974
2,8	,4974	,4975	,4976	,4977	,4977	,4978	,4979	,4979	,4980	,4981
2,9	,4981	,4982	,4982	,4983	,4984	,4984	,4985	,4985	,4986	,4986
3,0	,4987	,4987	,4987	,4988	,4988	,4989	,4989	,4989	,4990	,4990