Sérgio CARVALHO
Weber CAMPOS

ESTATÍSTICA INFERENCIAL

Simplificada

2ª edição

2025

EDITORA JusPODIVM
www.editorajuspodivm.com.br

Capítulo 1
Probabilidade

1. INTRODUÇÃO

Já na infância as pessoas conhecem e experimentam o conceito de "sorte", o qual as acompanha ao longo de toda a vida. Assim, tem sorte quem ganha uma rifa no colégio, ou quem acerta uma questão de múltipla escolha na prova, tendo-a respondido aleatoriamente.

Com um pouco mais de elaboração, alguém pode questionar: "qual a chance que tenho de ganhar na loteria?"

Em socorro ao senso comum, vem a Matemática tratar da Probabilidade, dando-nos a conhecer que é de 20% a chance de um aluno – ou concurseiro – acertar a questão de múltipla escolha (com cinco alternativas), contra 80% de chance de errá-la.

Objeto do nosso estudo neste capítulo, a Probabilidade está certamente entre os assuntos mais instigantes da Matemática, e vem nos ensinar, com suas técnicas e nuances, a identificar matematicamente a chance de se obter determinado resultado em um experimento.

2. CONCEITOS INICIAIS

A **Teoria da Probabilidade** faz uso de uma nomenclatura própria, de modo que há três conceitos fundamentais que temos que passar imediatamente a conhecer: **Experimento Aleatório**, **Espaço Amostral** e **Evento**.

Experimento Aleatório: é o experimento que mesmo repetido diversas vezes, sob as mesmas condições, pode apresentar resultados diferentes.

Exemplos de experimento aleatório:

→ lançar um dado e observar o resultado;

→ lançar duas moedas e observar o número de caras obtidas;

→ selecionar uma carta de um baralho de 52 cartas e observar seu naipe.

Espaço Amostral: é apenas o "conjunto dos resultados possíveis" de um Experimento Aleatório.

Designaremos o Espaço Amostral por "**S**"**.** Consideremos os exemplos abaixo, e determinemos os respectivos espaços amostrais:

a) lançar um dado, e observar a face de cima.

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

b) lançar duas moedas e observar as faces de cima.

S = { (cara, cara); (cara, coroa); (coroa, cara); (coroa, coroa) }

Atenção: saber determinar qual o espaço amostral **S** de um experimento aleatório, e conhecer o número de elementos desse espaço amostral **n(S)** é meio caminho andado para acertarmos muitas questões de Probabilidade.

Como foi dito, designaremos o número de elementos de um espaço amostral por **n(S)**. Assim, repetindo alguns exemplos acima, teremos que:

→ lançar um dado, e observar a face de cima.

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} → E: **n(S)=6**

→ lançar duas moedas e observar as faces de cima.

S = {(cara, cara); (cara, coroa); (coroa, cara); (coroa, coroa)} → E: **n(S)=4**

Faremos mais alguns exemplos de determinação do tamanho do espaço amostral.

Exemplo 01: Para cada experimento aleatório abaixo, determinar o número de elementos do respectivo espaço amostral.

Experimento A) Lançar três moedas e observar os resultados.

Para sabermos o número de resultados possíveis para o lançamento de três moedas, podemos usar a técnica da Análise Combinatória chamada de Princípio Fundamental da Contagem.

Como para cada lançamento há duas possibilidades de resultado (cara ou coroa), teremos:

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow 1^{\circ} \text{ lançamento} \rightarrow 2 \text{ possibilidades} \\ \rightarrow 2^{\circ} \text{ lançamento} \rightarrow 2 \text{ possibilidades} \\ \rightarrow 3^{\circ} \text{ lançamento} \rightarrow 2 \text{ possibilidades} \end{array}\right\} 2\text{x}2\text{x}2=8 \rightarrow \text{Logo: } \mathbf{n(S)=8}$$

Experimento B) Escolher, entre um grupo de cinco pessoas (A, B, C, D, E), duas delas para formar uma comissão.

Neste caso, trabalharemos utilizando outra técnica da Análise Combinatória chamada de **Combinação**.

Teremos: $C_{5,2} = \dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} = 10$

Logo: **n(S)=10**

Conclui-se neste último exemplo que a Análise Combinatória pode ser útil na determinação do número de elementos **n(S)** de um Espaço Amostral **(S)**.

O terceiro conceito essencial ao estudo da Probabilidade é o conceito de **Evento**.

EVENTO: consiste em um subconjunto do Espaço Amostral. Designaremos um evento por uma letra maiúscula.

Entendamos melhor por meio do exemplo abaixo:

→ Experimento Aleatório: lançar um dado e observar a face para cima.

- Espaço Amostral: **S**={1, 2, 3, 4, 5, 6} → **n(S)** = 6

- Evento A: obter um resultado par no lançamento do dado.

O conjunto do evento A será: **A = {2, 4, 6}** → **n(A)=3**

Se o resultado do lançamento do dado pertencer ao conjunto **A**, diremos que ocorreu o **evento A**.

Veja outros exemplos de eventos que se podem construir no experimento de lançar o dado:

- Evento B: obter um múltiplo de 3 no lançamento do dado.

O conjunto do evento B será: **B = {3, 6}** → **n(B)=2**

- Evento C: obter um resultado maior ou igual a 7 no lançamento do dado.

O conjunto do evento C será: **C = { }** (ou seja: vazio) → **n(C)=0**

Neste último exemplo, quando isso acontecer, estaremos diante de um "evento impossível".

Observemos nos exemplos acima que, para cada evento **X**, designamos por **n(X)** o número de elementos de cada evento!

Atenção: Para a determinação do número de elementos de um evento, dependendo do caso, poderemos também ter que lançar mão das técnicas de Análise Combinatória. Conhecer o **n(X)**, ou seja, o número de elementos de um evento que virá descrito no enunciado é o segundo passo para a resolução de algumas questões de probabilidade que resolveremos adiante.

A questão de Probabilidade trará em seu enunciado a descrição de um **experimento aleatório**, e a descrição de um **evento**. E perguntará: qual a **probabilidade** de ocorrência daquele evento?

3. CÁLCULO DA PROBABILIDADE

→ Fórmula da Probabilidade: a probabilidade de ocorrência de um evento "X", num determinado experimento aleatório, e considerando que cada elemento do espaço amostral desse experimento tem a mesma probabilidade de ocorrer, será calculada por:

$$P(X) = \frac{n(X)}{n(S)} = \frac{\text{número de resultados favoráveis ao evento X}}{\text{número de resultados possíveis}}$$

Onde: → **n(S)** é o número de elementos do espaço amostral do experimento; e

→ **n(X)** é o número de elementos do evento **X**.

Como está dito, a fórmula acima é aplicável quando os elementos do espaço amostral tiverem a mesma probabilidade. Por exemplo, podemos aplicar a fórmula acima num experimento de lançamento de uma moeda "honesta" (não viciada), pois as faces cara e coroa têm a mesma probabilidade de sorteio. No entanto, não podemos aplicar num experimento de lançamento de uma moeda "não honesta" (viciada), pois a probabilidade de sorteio de uma das faces é maior do que a da outra.

Exemplo 02: Em dois lançamentos de uma moeda "honesta", qual é a probabilidade de ocorrer exatamente 1 cara?

Solução: O espaço amostral desse experimento é: **S** = {(cara, cara); (cara, coroa); (coroa, cara); (coroa, coroa)}. Ou seja, **4** resultados possíveis.

Nesses quatro resultados, quantos têm exatamente 1 cara? Há dois resultados contendo exatamente 1 cara: (**cara**, coroa) e (coroa, **cara**). Logo, o número de resultados favoráveis é **2**.

A probabilidade é dada pela razão entre resultados favoráveis e possíveis:

→ **P = 2/4 = 0,50 = 50% (Resposta!)**

Exemplo 03: De um baralho de 52 cartas, duas são extraídas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de ambas serem de ouro?

Solução: Ora, o experimento consiste em retirar (sem reposição) duas cartas de um baralho.

Daí, o espaço amostral é formado por todas as 52 cartas do baralho. Como o enunciado falou em retirada "sem reposição", significa que as cartas a serem escolhidas têm que ser distintas entre si. Logo, caímos num caso de Arranjo ou de Combinação. Mas Arranjo ou Combinação?

Criemos um resultado possível: { 2_{OURO}, 5_{COPAS} }

Invertamos os elementos desse resultado: { 5_{COPAS}, 2_{OURO} }

É a mesma dupla de cartas? Sim. Logo, a ordem não é relevante e assim trabalharemos com **Combinação**.

Calcularemos $C_{52,2}$:

$$C_{52,2} = \frac{52!}{2!.(52-2)!} = \frac{52 \times 51 \times 50!}{2!.50!} = \frac{52 \times 51}{2} = 1236$$

E chegamos, pois, à nossa primeira conclusão: que **n(S)**=1326.

Definiremos agora o **evento** e seu respectivo número de elementos.

Ora, o evento (X) é a retirada de duas cartas de (naipe) **ouro.**

Logo, nosso "conjunto universo" de possibilidades agora será o seguinte:

{AOURO, 2OURO, 3OURO, 4OURO, 5OURO, 6OURO, 7OURO, 8OURO, 9OURO, 10OURO, JOURO, QOURO, KOURO}

Naturalmente, formaremos subconjuntos com duas cartas de ouro **distintas**, logo, caímos numa resolução de Arranjo ou de Combinação. É Combinação, pois a ordem entre as duas cartas não é relevante. Daí, teremos: $C_{13,2}$.

$$C_{13,2} = \frac{13!}{2!.11!} = \frac{13\times12\times11!}{2\,.\,11!} = \frac{13\times12}{2} = 78 \rightarrow \mathbf{n(X)}=78$$

Passemos à última etapa da solução, que consiste na aplicação da fórmula da Probabilidade:

$$\text{P(X)} = \frac{\text{n(X)}}{\text{n(S)}} = \frac{\text{número de resultados favoráveis ao evento X}}{\text{número de resultados possíveis}}$$

Substituindo os resultados encontrados na fórmula, teremos:

$$\rightarrow \text{P}(X) = \frac{78}{1326} = \frac{1}{17} \quad \textbf{(Resposta!)}$$

Pelas resoluções dos últimos exemplos, traçaremos uma sequência padronizada de procedimentos que teremos que seguir para resolver as questões de probabilidade:

1º Passo) Trabalhar com o experimento aleatório, definindo o número de elementos do espaço amostral **n(S)**, isto é, o número de resultados possíveis;

2º Passo) Trabalhar com o evento, definindo o seu respectivo número de elementos **n(X)**, isto é, o número de resultados favoráveis;

3º Passo) Aplicar a fórmula da Probabilidade: $\text{P}(X) = \dfrac{n(X)}{n(S)}$

Exemplo 04: Dois dados são lançados e observados os números das faces de cima. Qual a probabilidade de ocorrerem números iguais?

Solução: Novamente os três passos:

1º Passo) Definindo o experimento aleatório: lançar dois dados diferentes. Quantas sequências de resultados são possíveis?

Pelo "Princípio Fundamental da Contagem", teremos:

$$\left.\begin{array}{l}\rightarrow 1^{\text{o}} \text{ dado} \rightarrow 6 \text{ possibilidades}\\ \rightarrow 2^{\text{o}} \text{ dado} \rightarrow 6 \text{ possibilidades}\end{array}\right\} 6\text{x}6=36 \rightarrow \mathbf{n(S)=36}$$

2º Passo) Definição do evento: o enunciado exige que os resultados dos dois dados sejam iguais. É fácil constatar que as únicas possibilidades de isso acontecer seriam as seguintes: {1, 1} ou {2, 2} ou {3, 3} ou {4, 4} ou {5, 5} ou {6, 6}.

Só há, portanto, 6 (seis) resultados favoráveis para esse evento. Logo: **n(X)**=6.

3º Passo) Aplicando, finalmente, a fórmula da probabilidade, teremos que:

$$\rightarrow \mathrm{P}(X) = \frac{n(X)}{n(S)} \rightarrow \mathrm{P}(X) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0{,}167 = 16{,}7\% \text{ (Resposta!)}$$

Exemplo 05: Lançando-se 4 vezes uma moeda "honesta", qual é a probabilidade de que ocorra cara exatamente 3 vezes?

1º Passo) Definição do experimento aleatório: lançar quatro vezes uma moeda. Quantos são os resultados possíveis?

Pelo "Princípio Fundamental da Contagem", teremos:

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow 1^{\text{o}} \text{ lançamento} \rightarrow 2 \text{ possibilidades} \\ \rightarrow 2^{\text{o}} \text{ lançamento} \rightarrow 2 \text{ possibilidades} \\ \rightarrow 3^{\text{o}} \text{ lançamento} \rightarrow 2 \text{ possibilidades} \\ \rightarrow 4^{\text{o}} \text{ lançamento} \rightarrow 2 \text{ possibilidades} \end{array}\right\} 2\text{x}2\text{x}2\text{x}2=16 \rightarrow \mathbf{n(S)}=16$$

São, portanto, 16 resultados possíveis!

2º Passo) Definição do evento: o enunciado exige que **ocorra cara exatamente 3 vezes**.

Analisemos as possibilidades: chamaremos "K" o resultado "cara", e "C", o resultado "coroa". As únicas formações possíveis com três resultados "cara" são as seguintes:

$$\left.\begin{array}{l} \text{K, K, K, C} \\ \text{K, K, C, K} \\ \text{K, C, K, K} \\ \text{C, K, K, K} \end{array}\right\} \text{Ou seja: } \mathbf{n(X)}=4$$

São, portanto, 4 resultados favoráveis!

Poderíamos achar este mesmo resultado aplicando a fórmula da permutação com repetição.

3º Passo) Aplicando, finalmente, a fórmula da probabilidade, teremos que:

$$\rightarrow \mathrm{P}(X) = \frac{n(X)}{n(S)} \rightarrow \mathrm{P}(X) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\% \text{ (Resposta!)}$$

Exemplo 06: (CESPE 2017 SEDUC Alagoas) Acerca de probabilidade, julgue o próximo item.

1. Considere que de uma urna com 10 bolas numeradas de 1 a 10, uma pessoa deva retirar, aleatoriamente, duas bolas ao mesmo tempo. Nesse caso, a probabilidade de que seja 12 a soma dos números das bolas retiradas é superior a 9%.

Solução:

Inicialmente uma observação: para a Probabilidade, a retirada de duas bolas ao mesmo tempo é o mesmo que retirar uma bola de cada vez, mas <u>sem reposição</u>.

Vamos agora ao cálculo do número de resultados possíveis do experimento. Para obter essa quantidade é interessante utilizar alguma técnica da Análise Combinatória.

Os resultados possíveis são formados por dois números sorteados entre as bolas de 1 a 10, conforme mostrado abaixo:

Resultado: $\underset{\text{nº da 1ª bola}}{\underline{\qquad}}$ $\underset{\text{nº da 2ª bola}}{\underline{\qquad}}$

Pelo Princípio Fundamental da Contagem (Princípio Multiplicativo), o número de resultados possíveis é calculado do seguinte modo:

→ há 10 possibilidades (bolas de 1 a 10) de números para a 1ª bola; e

→ há 9 (=10-1) possibilidades de números para a 2ª bola, pois o número da 2ª bola não pode ser o mesmo da 1ª bola.

O total de possibilidades é obtido pelo produto das possibilidades de cada etapa:

Nº de resultados possíveis = 10 x 9 = **90**

Agora passemos ao cálculo do número de resultados favoráveis. De acordo com a probabilidade expressa no enunciado, o resultado é favorável se a soma dos dois números é igual a 12. Vejamos todos os arranjos favoráveis à soma igual a 12:

1) 2 e 10; 2) 10 e 2; 3) 3 e 9; 4) 9 e 3; 5) 4 e 8; 6) 8 e 4; 7) 5 e 7; 8) 7 e 5

Temos, então, **8** resultados favoráveis.

A probabilidade é dada pela razão entre resultados favoráveis e possíveis:

→ **P = 8/90 = 0,088 = 8,8 %**

Portanto, o item está **ERRADO!**

4. AXIOMAS DA PROBABILIDADE

Destacamos os seguintes axiomas:

1º) A Probabilidade de um evento é um valor entre 0 e 1.

$$\mathbf{0 \leq P(evento\ X) \leq 1}$$

Assim, a probabilidade tem valor máximo de 1 (=100%). Neste caso (P=1), estaremos diante do chamado *evento certo*.

Por exemplo: qual a probabilidade de obtermos um valor menor que 7 no lançamento de um dado? Ora, trata-se de um evento certo. Há aqui uma "certeza matemática". A probabilidade será, portanto, de 1.

A ideia oposta ao do evento certo é a do *evento impossível*: aquele cuja probabilidade de ocorrência é de 0. Exemplo: qual a probabilidade de eu ganhar na loteria sem jogar? Nenhuma! Ou seja, P = 0.

2 º) A soma das probabilidades de cada elemento do espaço amostral é igual a 1.

Por exemplo, no caso do lançamento de um dado, teremos:

→ P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1

No caso do lançamento de uma moeda, teremos:

→ P(cara) + P(coroa) = 1

Exemplo 07: Três atletas competem numa pista de corrida. André tem 3 vezes mais probabilidade de vencer do que Mauro; este por sua vez, tem 2 vezes mais probabilidade de vencer do que Luís. Quais são as probabilidades de vitória de cada atleta?

Solução: O nosso espaço amostral (S), relativo ao vencedor da corrida, é dado por:

→ S = {Luís vence, Mauro vence, André vence}

Façamos P(Luís vencer)=x. Desta forma, teremos:

→ P(Mauro vencer) = 2x

→ P(André vencer) = 3.P(Mauro vencer) = 3 . 2x = 6x

A soma das probabilidades deve ser igual a 1. Daí:

→ x + 2x + 6x = 1

→ 9x = 1

→ x = 1/9

Logo, temos os seguintes resultados:

→ P(Luís vencer)= 1/9

→ P(Mauro vencer)= 2 . 1/9 = 2/9

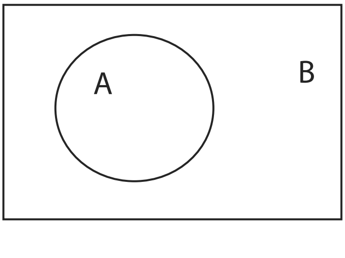
→ P(André vencer)= 6 . 1/9 = 6/9 = 2/3

3 º) A probabilidade de ocorrência de um evento X somada com a probabilidade de não ocorrência desse mesmo evento é igual a 1.

P(X ocorrer) + P(X não ocorrer) = 1

Dizemos que os eventos "X ocorrer" e "X não ocorrer" são **eventos complementares**. Portanto, a soma das probabilidades de eventos complementares é igual a 1.

Em termos de conjunto, dois eventos complementares A e B podem ser representados do seguinte modo (em que o retângulo representa o espaço amostral S):



O conjunto do evento A é representado por um círculo, e a região fora do círculo responde ao conjunto do evento B. Observe que $A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = S$ (espaço amostral).

Vejamos mais alguns exemplos de eventos complementares:

→ P(ganhar o jogo) + P(não ganhar o jogo) = 1

→ P(réu inocente) + P(réu culpado) = 1

→ P(cara) + P(coroa) = 1

→ P(par no dado) + P(ímpar no dado) = 1

→ P(máximo de 2 meninos) + P(mínimo de 3 meninos) = 1

→ P(nascer pelo menos 1 menina) + P(nascer nenhuma menina) = 1

Esta relação será utilizada muitas vezes nas soluções de questões de probabilidade. Através dela, podemos calcular a probabilidade de um evento ocorrer a partir da probabilidade do evento complementar.

Por exemplo, uma questão pede a probabilidade de ocorrer pelo menos uma cara no lançamento de três moedas: P(pelo menos 1 cara) = ?. Ora, é mais fácil calcular a probabilidade do evento complementar, ou seja, calcular P(nenhuma cara), pois desta forma só haverá uma situação favorável: (coroa, coroa, coroa). Calculada essa probabilidade, é só lançar o resultado na relação existente entre eventos complementares para encontrar a probabilidade da ocorrência do evento desejado na questão, neste caso:

→ P(pelo menos 1 cara) = 1 – P(nenhuma cara)

5. PROBABILIDADE DE INTERSECÇÃO DE EVENTOS – REGRA DO E: P(A E B)

Esta situação se verificará sempre que a questão solicitar a probabilidade de ocorrência conjunta de dois ou mais eventos, ou seja, eventos ligados pelo conectivo **E**. Por exemplo:

a) Qual a probabilidade de, ao retirarmos duas cartas de um baralho, obtermos um "ás" **E** um "valete"?

b) Qual a probabilidade de, ao retirarmos duas bolas de uma urna, obtermos duas bolas brancas? (Refere-se à situação: a 1ª é branca **E** a 2ª é branca.)

c) Qual a probabilidade de, entre os dois filhos (Rômulo e Remo) de um casal, somente o Rômulo seja aprovado no vestibular? (Refere-se à situação: o Rômulo é aprovado **E** o Remo é reprovado.)

O conectivo **E** aparece explicitamente apenas na probabilidade pedida no item (a). Nas demais probabilidades, embora o **E** não esteja explícito, tivemos condições de enxergá-lo e de fazê-lo aparecer.

Em termos de conjunto, o conectivo **E** significa i*ntersecção*! Trabalharemos, assim, com uma fórmula própria: a da *Probabilidade da Intersecção de Dois Eventos*, ou, simplesmente, a *regra do E*.

Dados dois eventos, A e B, a probabilidade de que ocorram **A e B** é igual a:

P(A e B) = P(A) x P(B|A)

A **P(B|A)** significa a probabilidade de ocorrer o evento B sabendo que o evento A já tenha ocorrido. Ou, simplesmente: é a *probabilidade de B dado A*. (Note que **B|A** não é uma fração.)

Exemplo 08: Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. São retiradas duas bolas desta urna (sem reposição). Qual é a probabilidade de as duas bolas retiradas serem brancas?

Solução:

Sempre que houver a ocorrência de mais de um evento é importante que adaptemos a pergunta da questão de forma que apareça a partícula E.

De forma equivalente ao texto do enunciado, devemos calcular a probabilidade de que a *primeira bola retirada seja branca E a segunda bola retirada seja branc*a, ou seja:

P(1ª é branca E 2ª é branca)

Vamos abreviar a palavra "branca" para "br". Aplicando a regra do E, teremos:

P(1ª br E 2ª br) = P(1ª br) x P(2ª br|1ª br)

A probabilidade de a primeira bola retirada ser branca é igual à razão entre o número de resultados favoráveis (4 bolas brancas) e o número de resultados possíveis (10 bolas da urna). Ou seja:

P(1ª br) = 4/10

Agora temos que calcular a probabilidade de que a segunda bola retirada seja branca, dado que a primeira foi branca. Como uma bola branca foi retirada, temos agora na urna 3 bolas brancas e 6 bolas pretas. E a probabilidade de a segunda bola retirada ser branca é igual à razão entre o número de bolas brancas (3) e o número de bolas da urna (9):

P(2ª br|1ª br) = 3/9

Falta efetuar o produto das duas probabilidades encontradas. (Devemos ter em mente que o **E** representa um **produto de probabilidades** de eventos que ocorrem simultaneamente). Teremos:

P(1ª br E 2ª br) = 4/10 x 3/9 = 2/15 (Resposta!)

6. PROBABILIDADE DE EVENTOS INDEPENDENTES

Dois eventos, A e B, são *independentes* quando a ocorrência, ou não-ocorrência, de um deles não afeta a probabilidade de ocorrência do outro.

Por exemplo, ao efetuarmos dois lançamentos sucessivos de uma moeda, os eventos "cara no primeiro lançamento" e "coroa no segundo lançamento" são eventos independentes, uma vez que o resultado do primeiro lançamento da moeda não afeta a probabilidade de ocorrência do resultado coroa no segundo lançamento.

Porém, ao retirarmos duas cartas sem reposição de um baralho, os eventos "ás na primeira retirada" e "valete na segunda retirada" são *eventos dependentes*, porque ao retirarmos a primeira carta, dada a ocorrência, ou não, do "ás", o total de cartas do baralho sofrerá uma redução, alterando desta forma a probabilidade de ocorrência da segunda carta.

E se retirarmos duas cartas com reposição, esses eventos serão independentes? Quando se repõe a carta retirada, o número de cartas de cada tipo (às, valete, dama etc.) não se altera e nem, é claro, o total de cartas. Desta forma, a probabilidade referente à segunda carta retirada não dependerá da primeira, resultando, por conseguinte, que esses eventos são independentes.

Quando dois eventos (A e B) são **independentes**, a *probabilidade do evento B ocorrer dado que A ocorreu*, simbolizada por **P(B|A)**, será sempre igual a **P(B)**, pois como são independentes, então B não depende de A (e vice-versa):

→ P(B|A) = P(B)

Naturalmente, também teremos:

→ P(A|B) = P(A)

Portanto, para *eventos independentes*, a regra do "E" pode ser modificada para:

P(A e B) = P(A) x P(B)

E podemos afirmar que: "**Dois eventos, A e B, são independentes se, e somente se, ocorrer a igualdade P(A e B) = P(A) x P(B)**".

Portanto, se as probabilidades forem fornecidas, então temos como testar a independência de dois eventos A e B pela comparação do valor de P(A e B) com o do produto **P(A) x P(B)**. Sendo iguais, então serão independentes; caso contrário, dependentes.

Para a independência de três eventos, teremos o seguinte conceito:

"**Três eventos A, B e C são independentes se, e somente se, ocorrerem as seguintes igualdades:**

→ **P(A e B e C) = P(A) x P(B) x P(C);**

→ **P(A e B) = P(A) x P(B);**

→ **P(A e C) = P(A) x P(C);**

→ **P(B e C) = P(B) x P(C)**".

Então, no caso de três eventos, não basta que **P(A e B e C) = P(A) x P(B) x P(C)** para considerarmos que os eventos são independentes. É também preciso que as demais igualdades apresentadas se verifiquem.

Exemplo 09: (FGV) Sejam A e B dois eventos definidos em um espaço amostral S de modo que P(A) = 0,70, P(B) = 0,20 e P(A ∩ B) = 0,14. Então, pode-se dizer que A e B são eventos:

a) mutuamente exclusivos.
b) complementares.
c) independentes.
d) condicionais.
e) elementares.

Solução:

Temos dois eventos A e B definidos em um espaço amostral S, com as seguintes probabilidades:

P(A) = 0,70;

P(B) = 0,20;

P(A∩B) = 0,14.

Vamos verificar qual o valor do produto P(A)xP(B):

P(A)xP(B) = 0,70 x 0,20 = **0,14**

Qual foi o valor fornecido no enunciado para P(A∩B)? Também foi **0,14**. Daí, a igualdade P(A∩B)=P(A)xP(B) foi verificada. Portanto, **A e B são eventos independentes**!

Resposta: Alternativa C!

Exemplo 10: Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. São retiradas duas bolas desta urna, uma após a outra, com reposição. Qual é a probabilidade de as duas bolas retiradas serem brancas?

Solução:

A única diferença deste para o exemplo 07 é quanto à questão da reposição das bolas na urna. Neste aqui, as retiradas são feitas **com reposição**, enquanto lá no exemplo 07, **sem reposição**.

Se as retiradas forem feitas COM REPOSIÇÃO (bolas retiradas são repostas, devolvidas à urna, antes da próxima extração), então as retiradas serão **independentes**. Pois, como a quantidade de bolas dentro da urna permanece inalterada ao longo das retiradas, a probabilidade de ocorrência de um resultado **não** é influenciada pela retirada anterior.

Porém, se as retiradas forem feitas SEM REPOSIÇÃO (bolas retiradas não são devolvidas à urna), então as retiradas serão **dependentes**. Pois, como a quantidade de bolas dentro da urna é reduzida a cada retirada, então, a probabilidade de ocorrência de um resultado é influenciada pela retirada anterior.

No exemplo 07, após dividir o experimento em etapas e após a aplicação da regra do E, chegamos à expressão:

P(1ª br E 2ª br) = P(1ª br) x P(2ª br|1ª br)

Podemos ler essa expressão como: "a probabilidade de ocorrência de duas bolas brancas é igual ao produto entre a probabilidade de a primeira bola retirada ser branca e a probabilidade de a segunda bola retirada ser branca, dado que a primeira foi branca".

Na modalidade "com reposição", as retiradas são **independentes** entre si. Daí, a **regra do E** será simplificada para o seguinte produto de probabilidades:

P(1ª br e 2ª br) = P(1ª br) x P(2ª br)

A probabilidade de bola branca na 1ª retirada é de **4/10** (4 bolas brancas no total de 10 bolas da urna).

A probabilidade de bola branca na 2ª retirada também é **4/10** (4 bolas brancas no total de 10 bolas da urna).

Substituindo esses resultados parciais, teremos:

P(1ª br e 2ª br) = 4/10 x 4/10 = **0.16** (Resposta)

Exemplo 11: (ESAF) A probabilidade de um gato estar vivo daqui a 5 anos é 3/5. A probabilidade de um cão estar vivo daqui a 5 anos é 4/5. Considerando os eventos independentes, a probabilidade de somente o cão estar vivo daqui a 5 anos é de:

Solução:

O enunciado solicita: **a probabilidade de somente o cão estar vivo daqui a 5 anos?**

A palavra chave dessa pergunta é a palavra **somente**. Ora, a questão falava de duas figuras: o cão e o gato. Se deseja saber a probabilidade de **somente** o cão estar vivo daqui a 5 anos, podemos traduzir essa pergunta de outra forma: **"Qual a probabilidade de o cão estar vivo daqui a 5 anos E o gato estar morto?"**

Ora, se quero **somente** o cão vivo, é porque quero também o gato morto.

Precisamos, pois, calcular a probabilidade: P(cão vivo e gato morto).

Observe que aparece um E entre os bichinhos, sinal de que podemos utilizar a regra do E, a qual é dada por:

P(A e B) = P(A) x P(B|A)

Mas o enunciado diz que os eventos são independentes, assim podemos simplificar a regra do E para:

P(A e B) = P(A) x P(B)

Portanto, precisamos resolver a probabilidade:

P(cão vivo e gato morto) = P(cão vivo) x P(gato morto)

A probabilidade do "cão vivo" foi informada no enunciado: P(cão vivo) = 4/5. E podemos encontrar a probabilidade do "gato morto" a partir da probabilidade do "gato vivo" que é de 3/5.

O evento complementar de o **gato estar vivo** é justamente **o gato estar morto**. Ou seja, se o gato estiver vivo é porque não estará morto; e vice-versa: se estiver morto é porque não estará vivo. E não há uma terceira possibilidade!

Daí, sabendo que a probabilidade de o gato estar vivo é de (3/5), então a fração que representará o evento de o gato estar morto será exatamente de (2/5). Claro! Pois somando (2/5) a (3/5) dará igual a 1, que é 100%.

Substituindo os valores de probabilidade, teremos:

P(cão vivo e gato morto) = P(cão vivo) x P(gato morto)

P(cão vivo e gato morto) = 4/5 x 2/5 **= 8/25 (Resposta)**

7. PROBABILIDADE DE EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS

Dois eventos, A e B, são *mutuamente exclusivos* se eles não podem ocorrer simultaneamente. Quer dizer que se um evento ocorre, o outro certamente não ocorreu.

Por exemplo, em apenas dois lançamentos de uma moeda, os resultados possíveis são:

S = {(cara, cara); (cara, coroa); (coroa, cara); (coroa, coroa)}

Os eventos "obter duas caras" e "obter duas coroas" são mutuamente exclusivos, pois eles não podem ocorrer simultaneamente: ocorre um ou outro. Mas os eventos "obter exatamente 1 cara" e "obter exatamente 1 coroa" não são mutuamente exclusivos, pois se o resultado do primeiro lançamento for cara e o resultado do segundo lançamento for coroa, teremos uma situação em que esses dois eventos ocorrem ao mesmo tempo.

Se A e B forem eventos **mutuamente exclusivos**, então teremos:

→ **P(A|B) = 0** (Probabilidade de A ocorrer dado que B ocorreu é zero);

→ **P(B|A) = 0** (Probabilidade de B ocorrer dado que A ocorreu é zero);

→ **P(A e B) = 0** (Probabilidade de A e B ocorrerem simultaneamente é zero).

Dois eventos (A e B) mutuamente exclusivos são representados graficamente por dois círculos sem interseção ($A \cap B = \varnothing$).

Vejas mais alguns exemplos de eventos mutuamente exclusivos:

1) Experimento: Retirada de uma carta do baralho.
   Evento A: "resultar um ás".
   Evento B: "resultar um rei".
2) Experimento: Nascimento de duas crianças.
   Evento A: "nascer 2 meninas"
   Evento B: "nascer 2 meninos"