

Sérgio Carvalho  
Weber Campos

# RACIOCÍNIO LÓGICO

Simplificado

Volume  
**2**

**4ª edição • Revista e atualizada**

Inclui

- Gráficos, tabelas e outros elementos visuais para melhor aprendizado
- Exercícios resolvidos passo a passo (questões comentadas)
- Questões de concursos públicos selecionadas para praticar
- Destaques coloridos para facilitar a compreensão

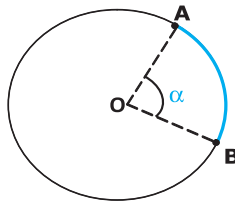
2027

## Capítulo 9

# Trigonometria

### 9.1. Arcos e Ângulos

Numa circunferência de centro  $O$ , a abertura do ângulo  $\alpha$  descreve na circunferência o arco  $AB$ .



As unidades do ângulo e do arco são dadas em graus ( $^\circ$ ) ou radianos (rad). Devemos lembrar-nos da relação entre essas unidades:

$$180^\circ = \pi \text{ rad (meia-volta)} \quad \text{ou} \quad 360^\circ = 2\pi \text{ rad (1 volta)}$$

Mostraremos como se converte de graus para radianos, e vice-versa.

#### 9.1.1. Conversão de Graus para Radianos

**Exemplo 1. Converter  $60^\circ$  para radianos.**

**Solução:**

Para converter de graus para radianos podemos usar uma regra de três simples:

$$\begin{array}{rcl} \pi \text{ rad} & \text{-----} & 180^\circ \\ x \text{ rad} & \text{-----} & 60^\circ \end{array}$$

$$\text{Daí: } 180 \cdot x = 60 \cdot \pi \Rightarrow x = 60\pi/180 = \pi/3$$

**Resposta:**  $60^\circ = \pi/3 \text{ rad}$

#### 9.1.2. Conversão de Radianos para Graus

**Exemplo 2. Converter  $\pi/6$  radianos para graus.**

**Solução:**

Converteremos graus para radianos também através de uma regra de três simples:

$$\begin{array}{rcl} 180^\circ & \text{-----} & \pi \text{ rad} \\ x & \text{-----} & \pi/6 \text{ rad} \end{array}$$

Daí:  $\pi \cdot x = 180 \cdot \pi/6 \Rightarrow x = 180/6 = 30$

**Resposta:**  $\pi/6 \text{ rad} = 30^\circ$

### 9.1.3. Relações entre Dois Ângulos

Dois ângulos são complementares quando a soma deles é igual a  $90^\circ$  (ou  $\pi/2$ ).

Dois ângulos são suplementares quando a soma deles é igual a  $180^\circ$  (ou  $\pi$ ).

Dois ângulos são replementares quando a soma deles é igual a  $360^\circ$  (ou  $2\pi$ ).

Dois ângulos são explementares quando a subtração deles é igual a  $180^\circ$  (ou  $\pi$ ).

**Exemplo 3.** Calcule a medida do suplemento de um ângulo de  $42^\circ 37' 10''$ .

**Solução:**

Temos de efetuar a subtração:

$$180^\circ - 42^\circ 37' 10''$$

Para tanto, temos de transformar  $180^\circ$  de forma que apareçam os minutos e segundos. Usaremos a equivalência:  $1^\circ = 60'$  (lê-se: 1 grau = 60 minutos) e  $1' = 60''$  (lê-se: 1 minuto = 60 segundos).

$$180^\circ = 179^\circ 60' = 179^\circ 59' 60''$$

Podemos agora resolver a subtração.

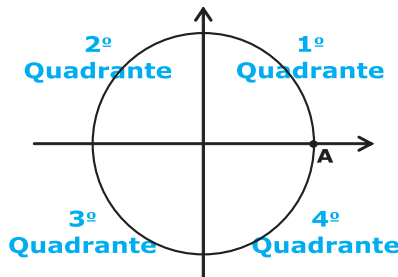
$$\begin{array}{r} 179^\circ 59' 60'' \\ - 42^\circ 37' 10'' \\ \hline 137^\circ 22' 50'' \end{array}$$

**Resposta:** A medida do ângulo é  $137^\circ 22' 50''$ .

## 9.2. O Ciclo Trigonométrico

Para estudarmos as funções trigonométricas (seno, cosseno etc.), precisamos antes conhecer o ciclo trigonométrico.

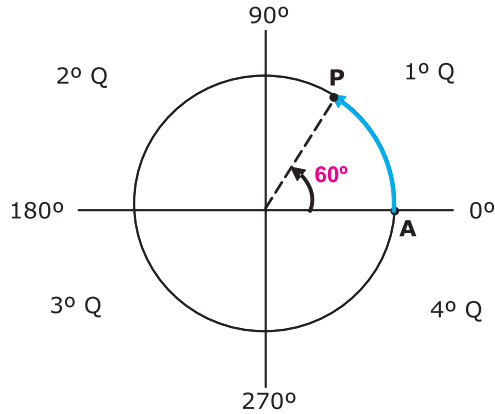
O ciclo trigonométrico apresenta uma circunferência de raio unitário com dois eixos ortogonais cruzando-se no centro da circunferência e orientados do seguinte modo: o vertical, com sentido para cima, e o horizontal, para a direita. Os eixos ortogonais dividem o ciclo trigonométrico em quatro quadrantes.



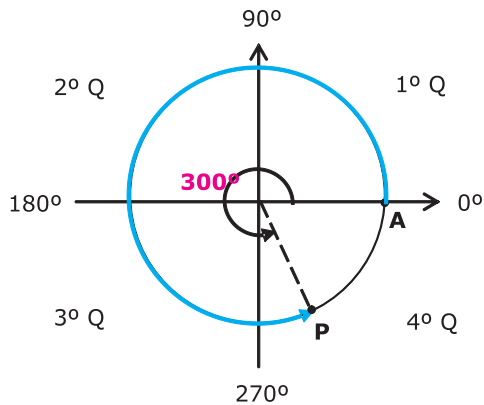
O ângulo positivo é marcado no ciclo trigonométrico a partir do ponto origem A e no sentido anti-horário. Mostraremos alguns exemplos:

1) Marcação do ângulo de  $60^\circ$

O ponto P marca a extremidade do arco descrito pelo ângulo.

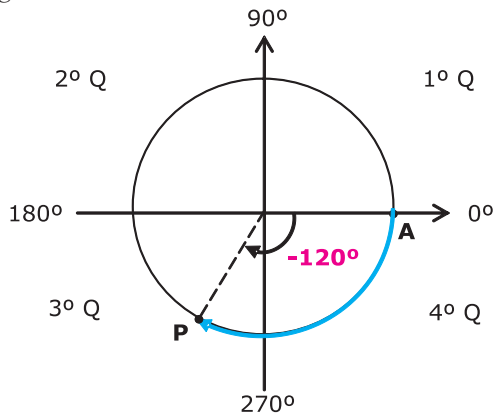


2) Marcação do ângulo de  $300^\circ$



O ângulo negativo é marcado no ciclo trigonométrico a partir do ponto origem A e no sentido horário. O ponto P marca a extremidade do arco descrito pelo ângulo. Mostraremos alguns exemplos:

3) Marcação do ângulo de  $-120^\circ$



### 9.2.1. Ângulos Côngruos ou Congruentes

Um ângulo maior em valor absoluto que  $360^\circ$  (ou  $2\pi$ ) percorre mais de uma volta no ciclo trigonométrico, e possui um ângulo congruente a ele que é menor que  $360^\circ$ . Dois ângulos são congruentes quando possuem o mesmo ponto inicial (A) e o mesmo ponto final (P).

**Exemplo 4. Qual é o ângulo congruente a  $1.480^\circ$ ?**

**Solução:**

Para calcular esse ângulo devemos dividir o ângulo por  $360^\circ$ .

$$\begin{array}{r|l} 1480 & 360 \\ \hline (40) & 4 \end{array}$$

O quociente 4 significa o número de voltas completas que o  $1.480^\circ$  dá no ciclo trigonométrico.

O resto 40 é exatamente o ângulo congruente a  $1.480^\circ$ . Portanto,  $1.480^\circ$  é congruente a  $40^\circ$ .

**Exemplo 5. Qual é o ângulo congruente a  $-1.980^\circ$ ?**

**Solução:**

$$\begin{array}{r|l} 1980 & 360 \\ \hline (180) & 5 \end{array}$$

O quociente 5 significa o número de voltas completas que o  $-1.980^\circ$  dá no círculo trigonométrico no sentido horário.

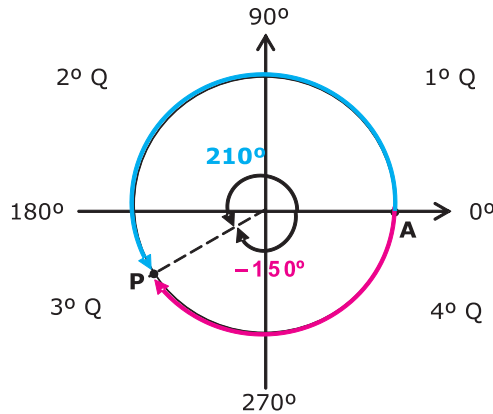
O resto 180 é o valor absoluto em graus que o ângulo de  $-1.980^\circ$  percorre após completar as cinco voltas. Daí,  $-1.980^\circ$  é congruente a  $-180^\circ$ .

Podemos ainda determinar qual é o ângulo positivo congruente a um ângulo negativo. Explicaremos através de um exemplo.

**Exemplo 6. Qual é o ângulo positivo congruente a  $-150^\circ$ ?**

**Solução:**

Para  $-150^\circ$  completar uma volta falta percorrer um valor absoluto em graus de  $210^\circ$  ( $= 360^\circ - 150^\circ$ ). Daí,  $210^\circ$  é o ângulo positivo congruente a  $-150^\circ$ . Veja o desenho.



### 9.2.1.1. Forma Generalizada de Congruência de um Ângulo

Todos os ângulos de origem A e extremidade P (diferindo apenas por um número inteiro  $k$  de voltas) são considerados ângulos congruentes entre si, pois ao somarmos ou subtrairmos a um ângulo um valor múltiplo de  $360^\circ$  (ou  $2\pi$ ) só estamos dando voltas no ciclo, mas sempre terminando no mesmo ponto P.

A forma generalizada de todos os ângulos congruentes a certo ângulo  $\alpha$  é dada pela expressão:

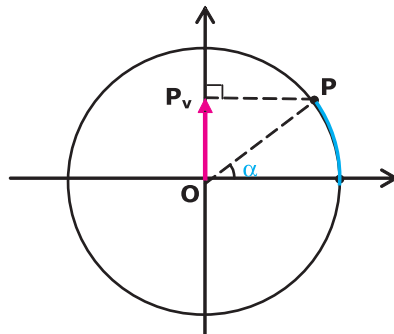
- Em graus:  $\alpha + k \cdot 360^\circ$
- Em radianos:  $\alpha + 2k\pi$

Onde  $k$  pertence ao conjunto dos números inteiros:  $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

## 9.3. Função Seno

Veremos as seguintes funções circulares: seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante. Iniciaremos pela função seno.

Para encontrar o seno de um ângulo, basta projetar ortogonalmente sua extremidade P sobre o eixo vertical (por isso, esse eixo também é chamado de eixo dos senos) e medir a distância entre o ponto de projeção ( $P_v$ ) e o centro O do ciclo, sempre levando em conta a orientação do eixo (positivo para cima e negativo para baixo).



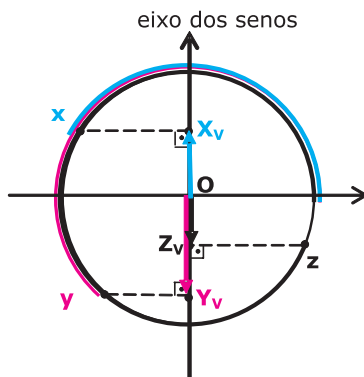
Para o caso dos ângulos fora do 1º quadrante, o procedimento é análogo. Na figura a seguir, sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  os ângulos do 2º, 3º e 4º quadrantes, respectivamente. Projetando suas extremidades, obtemos, respectivamente, os pontos  $X_v$ ,  $Y_v$  e  $Z_v$ .

Temos, então:

$$\text{sen } x = \overline{OX_v} \text{ (positivo)}$$

$$\text{sen } y = \overline{OY_v} \text{ (negativo)}$$

$$\text{sen } z = \overline{OZ_v} \text{ (negativo)}$$



### 9.3.1. Valores Notáveis de Seno

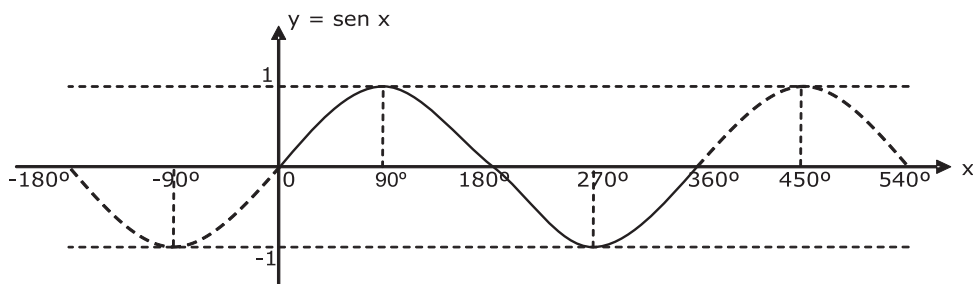
A tabela a seguir traz os senos de alguns ângulos especiais. Devemos memorizar esses valores.

| X     | 0° | 30° | 45°          | 60°          | 90° | 180° | 270° | 360° |
|-------|----|-----|--------------|--------------|-----|------|------|------|
| sen x | 0  | 1/2 | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1   | 0    | -1   | 0    |

### 9.3.2. A Função $y = \text{sen } x$

O domínio (os valores que  $x$  pode assumir) da função seno é igual ao conjunto dos reais. Sendo a unidade de  $x$  em radianos ou graus. Pelo ciclo trigonométrico constatamos que o seno de  $x$  é um valor no intervalo  $[-1, 1]$ , ou seja,  $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$ .

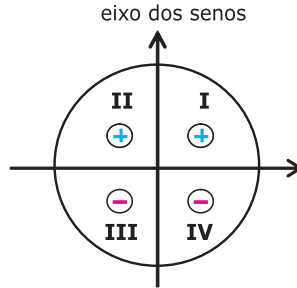
O gráfico da função seno é chamado de senoide. Temos a seguinte senoide para valores de  $x$  de  $-180^\circ$  ( $-\pi$ ) a  $540^\circ$  ( $3\pi$ ).



A senoide é periódica com período igual a  $360^\circ$  ( $2\pi$ ).

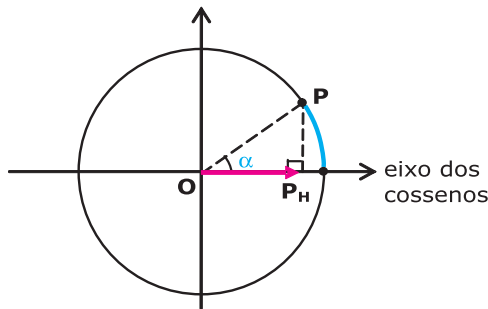
### 9.3.3. Sinal da Função Seno

Considerando a orientação do eixo dos senos, percebemos que os ângulos do 1º e 2º quadrantes associam-se a valores positivos de senos, e ângulos do 3º e 4º quadrantes associam-se a valores negativos de senos.



### 9.4. Função Cosseno

Para encontrar o cosseno de um ângulo, basta projetar ortogonalmente sua extremidade P sobre o eixo horizontal (por isso, esse eixo também é chamado de eixo dos cossenos) e medir a distância entre o ponto de projeção  $P_H$  e o centro O do ciclo, sempre levando em conta a orientação do eixo (positivo para direita e negativo para esquerda).



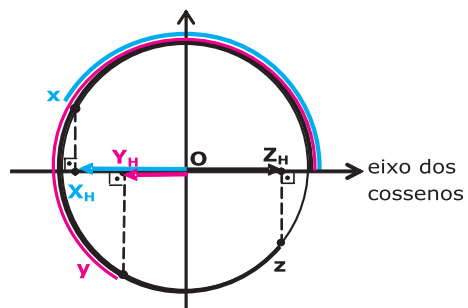
Para o caso dos ângulos fora do 1º quadrante, o procedimento é análogo. Na figura a seguir, sejam x, y e z os ângulos do 2º, 3º e 4º quadrantes, respectivamente. Projetando suas extremidades sobre o eixo dos cossenos, obtemos, respectivamente, os pontos  $X_H$ ,  $Y_H$  e  $Z_H$ .

Temos, então:

$$\cos x = \overline{OX_H} \text{ (negativo)}$$

$$\cos y = \overline{OY_H} \text{ (negativo)}$$

$$\cos z = \overline{OZ_H} \text{ (positivo)}$$



### 9.4.1. Valores Notáveis de Cosseno

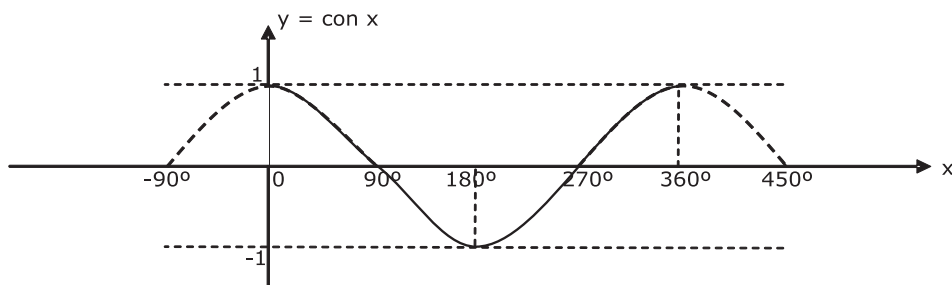
A seguinte tabela traz os cossenos de alguns ângulos especiais. Devemos memorizar esses valores.

| x     | 0° | 30°          | 45°          | 60° | 90° | 180° | 270° | 360° |
|-------|----|--------------|--------------|-----|-----|------|------|------|
| cos x | 1  | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1/2 | 0   | -1   | 0    | 1    |

### 9.4.2. A Função $y = \cos x$

O domínio (os valores que x pode assumir) da função cosseno é igual ao conjunto dos reais. Sendo a unidade de x em radianos ou graus. Pelo ciclo trigonométrico constatamos que o cosseno de x é um valor no intervalo  $[-1, 1]$ , ou seja,  $-1 \leq \cos x \leq 1$ .

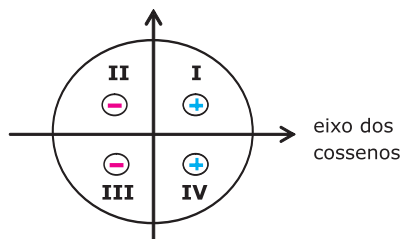
O gráfico da função cosseno é chamado de cossenoide. Temos a seguinte cossenoide para valores de x de  $-90^\circ$  ( $-\pi/2$ ) a  $450^\circ$  ( $5\pi/2$ ).



A cossenoide é periódica com período igual a  $360^\circ$  ( $2\pi$ ). Note que a cossenoide nada mais é que a senoide deslocada de  $90^\circ$  para a esquerda.

### 9.4.3. Sinal da Função Cosseno

Considerando a orientação do eixo dos cossenos, percebemos que os ângulos do 1° e 4° quadrantes associam-se valores positivos de cossenos, e a ângulos do 2° e 3° quadrantes associam-se valores negativos de cossenos.



## 9.5. Ângulos da Forma: $180^\circ - \alpha$ , $180^\circ + \alpha$ e $360^\circ - \alpha$

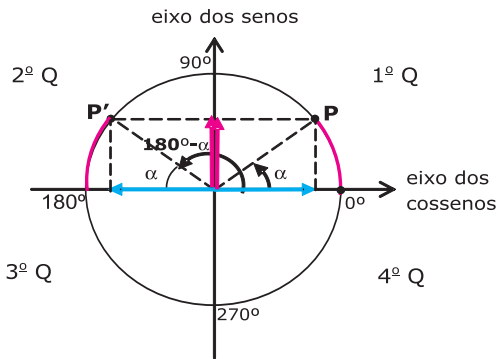
Estabeleceremos relações com os ângulos  $180^\circ - \alpha$ ,  $180^\circ + \alpha$  e  $360^\circ - \alpha$  a partir das simetrias no ciclo trigonométrico: simetria em relação ao eixo vertical, simetria em relação ao eixo horizontal e simetria em relação ao centro.

Para o estudo de cada uma delas, tomaremos um arco de medida  $\alpha$ , do primeiro quadrante, ou seja,  $0 < \alpha < 90^\circ$ .

### 9.5.1. Simetria em Relação ao Eixo Vertical

Seja  $P$  a extremidade do ângulo de medida  $\alpha$ . O simétrico de  $P$  em relação ao *eixo vertical* é o ponto  $P'$ , extremidade do ângulo de medida  $180^\circ - \alpha$ .

Observe na figura que os pontos  $P$  e  $P'$  possuem a mesma projeção no eixo vertical e também terão as mesmas projeções no eixo horizontal, porém com sinais opostos.



Como os ângulos  $\alpha$  e  $180^\circ - \alpha$  possuem a mesma projeção vertical, podemos afirmar que:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

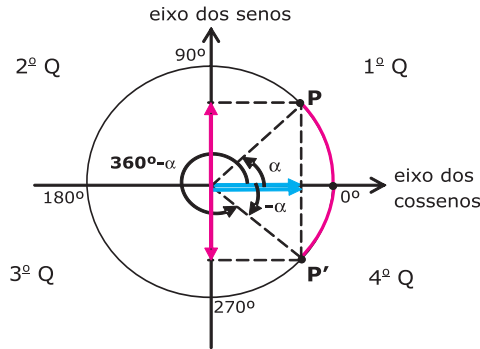
Os ângulos  $\alpha$  e  $180^\circ - \alpha$  possuem projeções horizontais de medidas iguais, mas de sinais contrários. Daí:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

### 9.5.2. Simetria em Relação ao Eixo Horizontal

Seja  $P$  a extremidade do ângulo de medida  $\alpha$ . O simétrico de  $P$  em relação ao *eixo horizontal* é o ponto  $P'$ , extremidade do ângulo de medida  $360^\circ - \alpha$ .

Observe na figura que os pontos  $P$  e  $P'$  possuem a mesma projeção no eixo horizontal e também terão as mesmas projeções no eixo vertical, porém com sinais opostos.



Como os ângulos  $\alpha$  e  $360^\circ - \alpha$  possuem a mesma projeção horizontal, podemos afirmar que:

$$\cos (360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

Os ângulos  $\alpha$  e  $360^\circ - \alpha$  possuem projeções verticais de medidas iguais, mas de sinais contrários. Daí:

$$\text{sen} (360^\circ - \alpha) = -\text{sen} \alpha$$

Observando na figura as projeções dos ângulos  $\alpha$  e  $-\alpha$ , podemos também afirmar que:

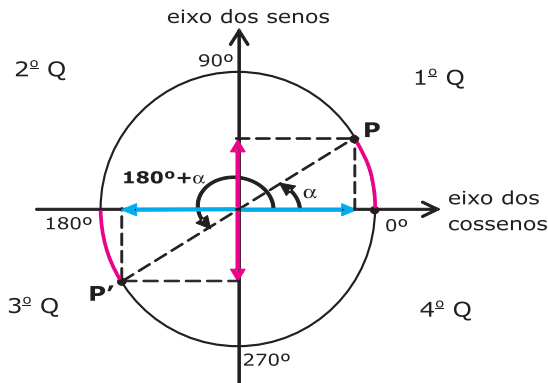
$$\cos (-\alpha) = \cos \alpha \quad \text{e} \quad \text{sen} (-\alpha) = -\text{sen} \alpha$$

Da figura, também podemos concluir que os ângulos  $360^\circ - \alpha$  e  $-\alpha$  são congruentes.

### 9.5.3. Simetria em Relação ao Centro do Ciclo

Seja P a extremidade do ângulo de medida  $\alpha$ . O simétrico de P em relação ao *centro do ciclo* é o ponto P', extremidade do ângulo de medida  $\alpha + 180^\circ$ .

Observe na figura que os pontos P e P' possuem a mesma projeção no eixo horizontal e também no eixo vertical, porém ambas com sinais opostos.



Os ângulos  $\alpha$  e  $180^\circ + \alpha$  possuem projeções horizontais de medidas iguais, mas de sinais contrários. Daí:

$$\text{sen} (180^\circ + \alpha) = -\text{sen} \alpha$$

Os ângulos  $\alpha$  e  $180^\circ + \alpha$  possuem projeções verticais de medidas iguais, mas de sinais contrários. Daí:

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

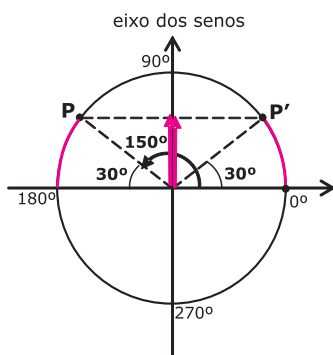
Todos os resultados obtidos com a simetria no ciclo trigonométrico são mostrados a seguir:

- 1)  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- 2)  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
- 3)  $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$
- 4)  $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$
- 5)  $\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
- 6)  $\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$

**Exemplo 7. Calcular  $\sin 150^\circ$  e  $\cos 225^\circ$ .**

**Solução:**

O ângulo de  $150^\circ$  está no 2º quadrante. Vamos marcar esse ângulo no ciclo trigonométrico e verificar a simetria em relação ao eixo vertical.



O simétrico de **P** em relação ao eixo vertical é o ponto **P'**. A extremidade **P'** forma um ângulo de medida  $30^\circ$ . Desse modo, as projeções verticais dos ângulos  $150^\circ$  e  $30^\circ$  são iguais e, conseqüentemente,  $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$ .

Sabemos que  $\sin 30^\circ$  é igual a  $1/2$ . Portanto, a resposta é:  **$\sin 150^\circ = 1/2$** .

Poderíamos simplesmente ter aplicado a fórmula  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ . Substituindo  $\alpha$  por  $150^\circ$ , teremos:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

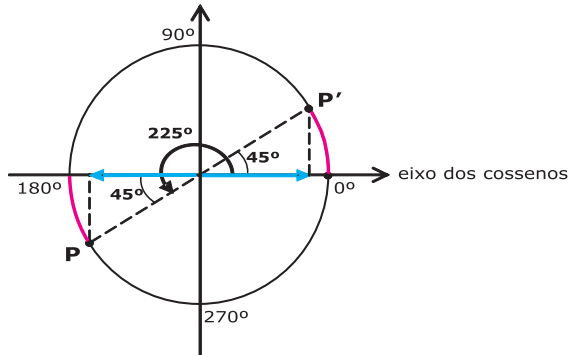
$$\sin(180^\circ - 150^\circ) = \sin 150^\circ$$

$$\sin(30^\circ) = \sin 150^\circ$$

Ou seja:  $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = 1/2$ .

Passemos a verificar o  $\cos 225^\circ$ .

O ângulo de  $225^\circ$  está no 3º quadrante. Vamos marcar esse ângulo no ciclo trigonométrico e verificar a simetria em relação ao centro do ciclo.



O simétrico de **P** em relação ao centro do ciclo é o ponto **P'**. A extremidade **P'** forma um ângulo de medida  $45^\circ$ . Desse modo, as projeções horizontais dos ângulos  $225^\circ$  e  $45^\circ$  são iguais em módulo, porém de sentidos opostos. Assim,  $\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ$ .

Sabemos que  $\cos 45^\circ$  é igual a  $\sqrt{3}/2$ . Portanto, a resposta é:  **$\cos 225^\circ = -\sqrt{3}/2$** .

Poderíamos também aplicar a fórmula  $\cos (180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$ . Fazendo  $180^\circ + \alpha = 225^\circ$ , o valor de  $\alpha$  fica em  $45^\circ$ . Daí:

$$\cos (180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos (225^\circ) = -\cos 45^\circ$$

$$\cos (225^\circ) = -\sqrt{3}/2 \text{ (Mesma resposta!)}$$

## 9.6. Relação Fundamental entre Seno e Cosseno

Temos a seguinte relação entre o seno e o cosseno de um ângulo  $x$  qualquer:

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

Ou de forma mais simplificada:

$$\mathbf{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

Assim, dado o seno de um ângulo qualquer, é possível, por meio da relação anterior, obter o cosseno desse mesmo ângulo, e vice-versa.

Para usar a relação fundamental é preciso apenas que os ângulos do seno e cosseno sejam iguais. Por exemplo, podemos escrever as seguintes igualdades:

$$\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2) = 1;$$

$$\sin^2(3x) + \cos^2(3x) = 1;$$

$$\sin^2(x+10^\circ) + \cos^2(x+10^\circ) = 1.$$

Para lembrar disso, podemos até anotar a relação fundamental sem citar o ângulo, do seguinte modo:

$$\mathbf{\sin^2 + \cos^2 = 1}$$

**Exemplo 8. (Esaf)** Se  $x$  é um arco do segundo quadrante e  $\sin x = 4/5$ , então  $\cos x$  é:

- a)  $-5/3$ ;                      d)  $3/5$ ;  
b)  $5/3$ ;                        e)  $-3/5$ .  
c)  $\pm 3/5$ ;

**Solução:**

O cosseno de  $x$  é negativo, pois  $x$  é um ângulo do segundo quadrante. Assim, a alternativa correta pode ser: A ou E. Mas não pode ser a alternativa A, porque o seno deve estar entre -1 e 1. Portanto, a resposta é **alternativa E**.

Embora tenhamos encontrado a opção correta, faremos ainda a solução mais detalhada.

Como temos que  $\text{sen} x = 4/5$ , podemos, então, obter o cosseno de  $x$  a partir da relação fundamental:  $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$ . Teremos:

$$(4/5)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$16/25 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - 16/25$$

$$\cos^2 x = 9/25 \quad \rightarrow \cos x = \sqrt{9/25} \quad \rightarrow \cos x = \pm 3/5$$

No início da solução, havíamos concluído que o  $\cos x$  era negativo. Portanto, descartaremos o valor positivo, e a resposta será:

$$\cos x = -3/5$$

**Resposta:** alternativa E.

## 9.7. Função Tangente

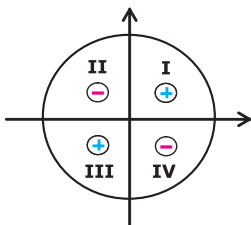
Para obter os valores das **tangentes** dos ângulos, podemos utilizar a relação:

$$tg\ x = \frac{\text{sen}\ x}{\cos\ x}$$

Quando o cosseno de  $x$  for zero a tangente não estará definida.

Os valores de seno e cosseno estão limitados ao intervalo  $[-1, 1]$ , mas a tangente pode assumir qualquer valor no conjunto dos números reais.

O sinal da função tangente pode ser obtido a partir do sinal das funções seno e cosseno. Como a tangente é dada pela razão entre o seno e o cosseno, ela será positiva quando o seno e o cosseno tiverem o mesmo sinal (1º quadrante e 3º quadrante) e será negativa quando o seno e o cosseno tiverem sinais diferentes (2º quadrante e 4º quadrante).



**Exemplo 9. (Esaf)** Sabendo-se que  $3\cos x + \sin x = -1$ , então, um dos possíveis valores para a tangente de  $x$  é igual a:

- |             |             |
|-------------|-------------|
| a) $-4/3$ ; | d) $-5/3$ ; |
| b) $4/3$ ;  | e) $1/7$ .  |
| c) $5/3$ ;  |             |

**Solução:**

Vamos isolar o  $\sin x$  na expressão dada no enunciado.

$$\sin x = -1 - 3\cos x$$

Lançaremos esse resultado do  $\sin x$  na relação fundamental:  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ . Teremos:

$$(-1 - 3\cos x)^2 + \cos^2 x = 1$$

Resolvendo:

$$1 + 6\cos x + 9\cos^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$10\cos^2 x + 6\cos x = 0$$

$$\cos x \cdot (10\cos x + 6) = 0$$

Logo, temos dois resultados para o cosseno:

- $\cos x = 0$ ;
- $10\cos x + 6 = 0 \Rightarrow \cos x = -6/10 = -0,6$

O primeiro resultado ( $\cos x = 0$ ) deve ser descartado, pois senão a tangente ( $=\sin/\cos$ ) não ficará definida.

Lançaremos o resultado  $\cos x = -0,6$  na relação que foi escrita no início dessa solução.

$$\sin x = -1 - 3\cos x$$

$$\sin x = -1 - 3 \cdot (-0,6)$$

$$\sin x = -1 + 1,8$$

$$\sin x = 0,8$$

A tangente é a razão entre seno e cosseno.

$$\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x = 0,8 / (-0,6) = -4/3$$

**Resposta:** Alternativa A.

## 9.8. Função Cotangente

Para obter os valores das **cotangentes** dos ângulos, podemos utilizar a relação:

$$\cot g x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{ou} \quad \cot g x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Quando o seno de  $x$  for zero a cotangente não estará definida.

Assim como a tangente, a cotangente pode assumir qualquer valor no conjunto dos números reais.

O sinal da função cotangente é o mesmo da função tangente.

**Exemplo 10.** Se  $90^\circ < x < 180^\circ$  e  $\cot g x = -4/3$ , calcule  $\sin x$ .

**Solução:**

O ângulo  $x$  é do 2º quadrante, logo  $\sin x$  é positivo.

A cotangente é o inverso da tangente, assim ela é dada pela razão entre cosseno e seno.

$$\cotg x = -4/3 \Rightarrow \cos x / \sin x = -4/3 \Rightarrow \cos x = \frac{-4 \cdot \sin x}{3}.$$

Substituindo  $\cos x$  por  $\cos x = \frac{-4 \cdot \sin x}{3}$  na relação fundamental entre seno e cosseno, teremos:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x + \left( \frac{-4 \cdot \sin x}{3} \right)^2 = 1$$

$$\sin^2 x + \frac{16 \cdot \sin^2 x}{9} = 1$$

$$9\sin^2 x + 16\sin^2 x = 9$$

$$25\sin^2 x = 9$$

$$\sin^2 x = 9/25 \Rightarrow \sin x = \pm 3/5$$

Sabemos que o  $\sin x$  é positivo, daí:

$$\sin x = 3/5 \text{ (resposta)}$$

## 9.9. Função Secante

Para obter os valores das **secantes** dos ângulos, podemos utilizar a relação:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Quando o cosseno de  $x$  for zero a secante não estará definida.

Os valores do cosseno estão limitados ao intervalo  $[-1, 1]$ , consequentemente, a secante pode assumir qualquer valor em  $(-\infty, -1]$  ou  $[1, +\infty)$ , ou seja, o módulo da secante é um valor maior ou igual a 1.

O sinal da função secante é o mesmo da função cosseno.

## 9.10. Função Cossecante

Para obter os valores das **cossecantes** dos ângulos, podemos utilizar a relação:

$$\operatorname{cossec} x = \frac{1}{\sin x}$$

Quando o seno de  $x$  for zero, a cossecante não estará definida.

Assim como a secante, a cossecante pode assumir qualquer valor em  $(-\infty, -1]$  ou  $[1, +\infty)$ , ou seja, o módulo da cossecante é um valor maior ou igual a 1.

O sinal da função cossecante é o mesmo da função seno.

## 9.11. Valores Notáveis para as Funções $\sin$ , $\cos$ , $\tg$ , $\cotg$ , $\sec$ e $\operatorname{cossec}$

Na tabela a seguir, temos os valores das funções trigonométricas dos ângulos mais conhecidos. Sabendo os valores para seno e cosseno, pode-se deduzir os valores para a tangente, cotangente, secante e cossecante.

| x    | sen x                | cos x                | tg x                 | cotg x               | sec x                | cossec x             |
|------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 0°   | 0                    | 1                    | 0                    | --                   | 1                    | --                   |
| 30°  | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{3}{\sqrt{3}}$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | 2                    |
| 45°  | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1                    | 1                    | $\frac{2}{\sqrt{2}}$ | $\frac{2}{\sqrt{2}}$ |
| 60°  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | $\sqrt{3}$           | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 2                    | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ |
| 90°  | 1                    | 0                    | --                   | 0                    | --                   | 1                    |
| 180° | 0                    | -1                   | 0                    | --                   | -1                   | --                   |
| 270° | -1                   | 0                    | --                   | 0                    | --                   | -1                   |

## 9.12. Relações Trigonométricas

### 9.12.1. Relações Fundamentais

As relações fundamentais permitem que, dado o valor de uma das funções circulares de um ângulo qualquer, encontremos os valores das demais funções circulares do mesmo ângulo (se existirem).

$$1^a) \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 4^a) \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$2^a) \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad 5^a) \operatorname{cossec} x = \frac{1}{\sin x}$$

$$3^a) \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

### 9.12.2. Relações Decorrentes

A partir das relações fundamentais, podemos deduzir outras relações, que são úteis na simplificação de expressões trigonométricas.

- $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$
- $\operatorname{cotg}^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$

Da primeira fórmula, pode-se estabelecer uma relação direta entre tangente e cosseno, e também entre tangente e seno. Vejamos:

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{1 - \sin^2 x}}$$

Essas duas últimas fórmulas são úteis para encontrar diretamente o seno e o cosseno a partir da tangente, e vice-versa.

### 9.12.3. Relações entre Ângulos Complementares

O complementar do ângulo x é o ângulo (90° - x).