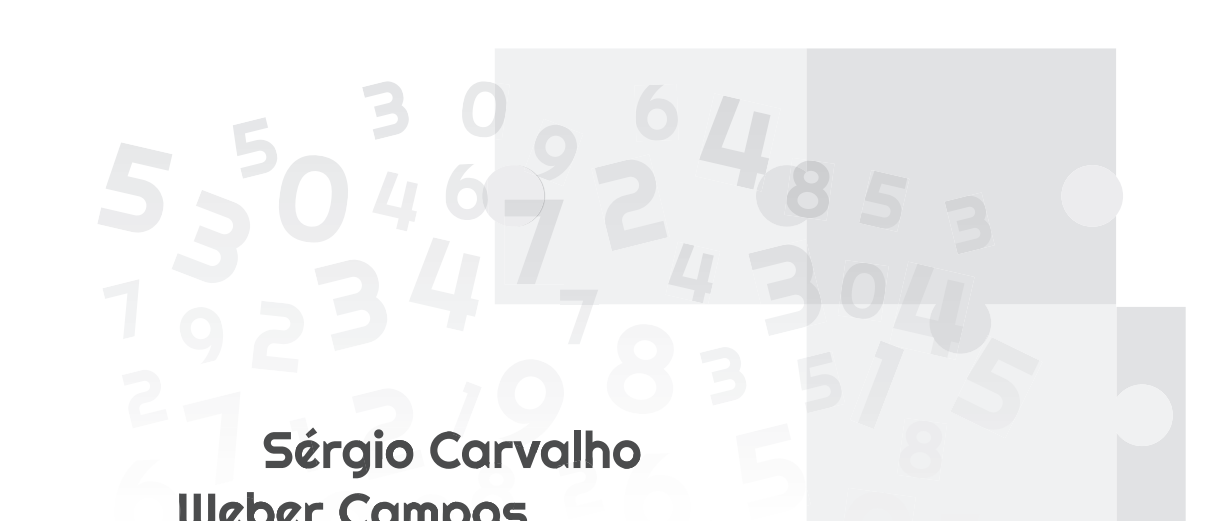




Sérgio Carvalho
Weber Campos

ESTATÍSTICA BÁSICA

Simplificada

4ª edição

2027

 EDITORA
JusPODIVM
www.editorajuspodivm.com.br

Capítulo 8

Números-Índices

8.1. Introdução

O assunto que estudaremos neste capítulo é, por assim dizer, distoante dos demais estudados até aqui. As medidas analisadas até este momento nos permitiam conhecer diversas características acerca dos elementos do conjunto estudado.

Assim, poderíamos conhecer o elemento de maior frequência (Moda); aquele que dividia o conjunto ao meio (Mediana); podíamos saber se os elementos estavam dispostos de forma mais ou menos dispersa, em relação à Média (Medidas de Dispersão); saberíamos dizer se o conjunto se distribuía de uma forma simétrica, ou não (Medidas de Assimetria); se a disposição da curva era mais ou menos achatada (Medidas de Curtose). Enfim, tínhamos condição de descrever o conjunto em suas mais diversas características.

Neste tema de Números-Índices não citaremos mais o rol, ou dados tabulados não agrupados em classes ou mesmo distribuições de frequências.

O que teremos aqui serão informações – geralmente fornecidas em tabelas – referentes a *preços* e a *quantidades* de um ou de vários bens (ou produtos), os quais serão analisados quanto à sua variação no tempo.

8.2. Conceito

Mediante o emprego de números-índices pode-se, por exemplo, comparar os custos de alimentação ou de vida, em uma cidade, durante um ano, com os de um ano anterior, ou a produção de carvão, durante um determinado ano, em uma região do país, com a de outra região. Embora sejam usados, principalmente, nos negócios e na economia, os números-índices podem ser aplicados a muitos outros campos. Na educação, por exemplo, podem-se usar os números-índices para comparar a média das notas dos estudantes de diversas localidades ou em anos diferentes.

Muitas repartições governamentais e particulares estão ocupadas com o cálculo de números-índices, ou *índices*, como são frequentemente denominados, com as finalidades da previsão dos negócios e das condições econômicas. Há, portanto, índices de salário, de produção, de bolsa de valores, de desemprego, e muitos outros.

Os índices mais usados e que serão objeto deste capítulo destinam-se a medir variações ocorridas ao longo do tempo das variáveis *preço*, *quantidade* e *valor*.

Quando o índice indicar variações relativas em quantidades, preços ou valores de um único produto, denominaremos de *número-índice simples*. Já se o índice é calculado para um grupo de produtos, por exemplo, variação no preço da cesta básica, então denominaremos de *número-índice composto ou complexo*.

8.3. Números-Índices Simples

8.3.1. Relativo de preço ($P_{o,t}$)

O relativo de preço, índice relativo de preço ou número-índice simples de preço é a relação entre o preço de um único item em determinado período (ano ou mês, geralmente) e o preço no período escolhido como base ou referência. Assim, esse índice se destina a acompanhar a evolução do preço de determinado produto.

Se P_o é o preço da mercadoria na época base e P_t é o preço num tempo t , o relativo de preço da mercadoria é dado por:

$$P_{o,t} = \frac{P_t}{P_o}$$

Observemos que, nestes números-índices que aprenderemos, estaremos sempre trabalhando com dois coeficientes, os quais dizem respeito a duas épocas diferentes: uma de referência, também chamada época *base*, e uma outra qualquer, chamada *época dada* ou *época atual*.

A simbologia comumente usada para designar estas duas épocas distintas é a seguinte:

subscrito 0 _(o) → indica período básico ou de referência;

subscrito t _(t) → indica período dado ou atual.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 1: Considere a tabela abaixo onde dispomos dos preços de 4 produtos, nos anos de 1998 (P_o) e de 1999 (P_t).

Produtos	Preço (em R\$)	
	1998 (P_o)	1999(P_t)
A	12	18
B	5	10
C	7	7
D	16	12

O cálculo do relativo de preço de 1999, com base em 1998, para cada produto é obtido da seguinte maneira:

$$\text{Fórmula do Relativo de Preço: } p_{98,99} = \frac{p_{99}}{p_{98}}$$

$$\rightarrow \text{Produto A: } p_{98,99} = \frac{p_{99}}{p_{98}} = \frac{\text{o preço de A em 1999}}{\text{o preço de A em 1998}} = \frac{18}{12} = 1,5 = 150\%$$

$$\rightarrow \text{Produto B: } p_{98,99} = \frac{p_{99}}{p_{98}} = \frac{\text{o preço de B em 1999}}{\text{o preço de B em 1998}} = \frac{10}{5} = 2 = 200\%$$

$$\rightarrow \text{Produto C: } p_{98,99} = \frac{p_{99}}{p_{98}} = \frac{\text{o preço de C em 1999}}{\text{o preço de C em 1998}} = \frac{7}{7} = 1 = 100\%$$

$$\rightarrow \text{Produto D: } p_{98,99} = \frac{p_{99}}{p_{98}} = \frac{\text{o preço de D em 1999}}{\text{o preço de D em 1998}} = \frac{12}{16} = 0,75 = 75\%$$

A partir destes resultados, construiremos uma nova tabela, onde estão presentes os relativos dos preços dos quatro produtos. Teremos:

Produtos	Relativos de Preço (%)
	$p_{98,99}$
A	150
B	200
C	100
D	75

Para obtermos quanto foi a variação do preço de um produto, basta subtrair o relativo de preço de 100%, daí teremos a seguinte relação muitíssimo útil:

$$\text{Variação de preço} = p_{o,t} - 100\%$$

Usando a relação anterior, podemos determinar as variações dos preços dos produtos no exemplo anterior. Teremos:

- A variação no preço do produto **A** foi de: + 50% (= 150% – 100%), ou seja, houve um aumento de 50%.
- A variação no preço do produto **B** foi de: + 100% (= 200% – 100%), ou seja, houve um aumento de 100%.
- A variação no preço do produto **C** foi de: 0% (= 100% – 100%), ou seja, o preço se manteve constante.
- A variação no preço do produto **D** foi de: – 25% (= 75% – 100%), ou seja, houve uma redução de 25%.

Observe que quando o valor do índice de preço é maior que 1 (ou 100%) significa que houve um aumento no preço do produto e quando o índice é menor que 1, indica uma redução no preço.

A relação mostrada anteriormente também pode ser escrita da forma indicada abaixo. Onde a partir da variação de preço, facilmente obtemos o relativo de preço $P_{o,t}$.

$$P_{o,t} = \text{Variação de preço} + 100\%$$

Exemplo 2: O relativo de preço correspondente a um aumento de 15% no preço do produto F, será:

$$P_{o,t} = \text{Variação de preço} + 100\% = 15\% + 100\% = 115\%$$

Exemplo 3: O relativo de preço correspondente a uma redução de 25% no preço do produto G, será:

$$P_{o,t} = \text{Variação de preço} + 100\% = -25\% + 100\% = 75\%$$

Importante: O símbolo de percentagem dos valores dos números-índices pode ser omitido. Por exemplo, o relativo de preço do produto F do exemplo acima que é de 115%, pode ser indicado por 115; do produto G que é de 75%, pode ser indicado por 75. Esta prática de omitir a percentagem é muito usual, inclusive em questões de concursos, em que os números-índices fornecidos no enunciado comumente não apresentam a percentagem. Vejamos outro exemplo abaixo.

Exemplo 4: Se o enunciado da questão fornecer o índice de preço igual a 120, para calcularmos a variação de preço, faremos:

O valor de 120 indica que o relativo de preço $P_{o,t}$ é igual a 120%.

Daí, a variação de preço será igual a:

$$P_{o,t} - 100\% = 120\% - 100\% = 20\%$$

Ou seja, houve um aumento de 20% no preço.

→ Mais exemplos sobre Relativo de Preço

Exemplo 5: O preço de um certo produto no mês de janeiro é de R\$ 200,00 e o seu relativo de preço em agosto, com base em janeiro, é 140. Calcule o preço deste produto em agosto.

Solução: Foi fornecido o relativo de preço: $P_{jan,ago} = 140\%$

Usando a fórmula do relativo de preço: $P_{jan,ago} = \frac{P_{ago}}{P_{jan}}$ e substituindo os dados fornecidos nela, teremos:

$$140\% = \frac{P_{ago}}{P_{jan}} \rightarrow 1,4 = \frac{P_{ago}}{200} \rightarrow p_{ago} = 1,4 \times 200$$

Logo, o preço do produto em agosto é de: $p_{ago} = 280$ reais

Exemplo 06: Monte o relativo de preço a partir da variação sofrida no preço de um bem, em cada uma das situações abaixo:

- a) No ano de 2002 o preço de um bem é 15% maior do que em 2001.

Solução: Temos a seguinte situação em que a referência é o ano de **2001**:

$$P_{2001} \xrightarrow{+15\%} P_{2002}$$

Daí, o relativo de preço será dado por: $P_{2001,2002} = \frac{P_{2002}}{P_{2001}}$

Como a variação de preço é de + 15%, então este relativo de preço terá valor igual a:

$$P_{2001,2002} = + 15\% + 100\% = 115\% \text{ ou } 115$$

- b) No ano de 2002 o preço de um bem é 24% menor do que em 2000.

Solução: Temos a seguinte situação em que a referência é o ano de **2000**:

$$P_{2000} \xrightarrow{-24\%} P_{2002}$$

Daí, o relativo de preço será dado por: $P_{2000,2002} = \frac{P_{2002}}{P_{2000}}$

Como a variação de preço é de – 24%, então este relativo de preço terá valor igual a:

$$P_{2000,2002} = - 24\% + 100\% = 76\% \text{ ou } 76$$

- c) No ano de 2002 o preço de um bem é 33% maior do que em 2003.

Solução: Temos a seguinte situação em que a referência é o ano de **2003**:

$$P_{2003} \xrightarrow{+33\%} P_{2002}$$

Daí, o relativo de preço será dado por: $P_{2003,2002} = \frac{P_{2002}}{P_{2003}}$

Como a variação de preço é de + 33%, então este relativo de preço terá valor igual a:

$$P_{2003,2002} = + 33\% + 100\% = 133\% \text{ ou } 133$$

8.3.2. Relativo de Quantidade ($q_{o,t}$)

É a relação entre as quantidade de um único produto, em dois momentos distintos, chamados época base (ou de referência) e época dada (ou atual). Assim, esse índice se destina a acompanhar a evolução da quantidade (consumida, ou vendida, ou produzida,...) de determinado produto.

Se q_o é a quantidade na época base e q_t é a quantidade na época dada, então o relativo de quantidade será obtido por:

$$q_{o,t} = \frac{q_t}{q_o}$$

Exemplo 7: Um loja vendeu 400 televisões em 1995 contra 250 em 1993. Calcular o relativo de quantidade em 1995, com base em 1993.

Solução:

$$q_{93,95} = \frac{q_{95}}{q_{93}} = \frac{400}{250} = 1,6 = 160\% \text{ ou } 160$$

Variação de quantidade = $160\% - 100\% = 60\%$, ou seja, houve um aumento de 60% nas vendas daquele produto.

8.3.3. Relativo de Valor ($v_{o,t}$)

É a relação entre o valores obtidos sobre um item, em dois momentos distintos, ditos *época base* (ou de referência) e *época dada*.

$$v_{o,t} = \frac{v_t}{v_o}$$

O valor ou faturamento em uma determinada época é obtido pela multiplicação do preço pela quantidade. Deste modo:

$$v_t = p_t \times q_t \quad \text{e} \quad v_o = p_o \times q_o$$

O relativo de valor também pode ser obtido a partir da multiplicação do relativo simples de preço pelo relativo simples de quantidade. Observe a demonstração:

$$v_{o,t} = \frac{v_t}{v_o} = \frac{p_t \times q_t}{p_o \times q_o} = \frac{p_t}{p_o} \times \frac{q_t}{q_o} \rightarrow v_{o,t} = p_{o,t} \times q_{o,t}$$

Exemplo 8: Uma empresa vendeu, em 1990, 5000 relógios ao preço de \$ 150,00. Em 1999 vendeu 7.000 relógios ao preço de \$ 180,00. Com base em 1990, calcular o relativo de valor.

$$v_{90,99} = \frac{v_{99}}{v_{90}} = \frac{p_t \times q_t}{p_o \times q_o} = \frac{180 \times 7000}{150 \times 5000} = \frac{1.260.000}{750.000} = 1,68 = 168\% \text{ ou } 168$$

Ou seja, em 1999, o faturamento da empresa foi 68% superior ao de 1990.

8.4. Propriedades dos Números-Índices Simples

As propriedades apresentadas nas seções a seguir são aplicáveis aos *relativos de preço, de quantidade e de valor*.

8.4.1. Propriedade da Identidade

O número-índice deve ser igual à unidade quando a época dada (t) coincidir com a época base (o).

$$I_{o,o} = 1$$

- índice.

Em termos de *Relativo de Preço*, teremos:

$$p_{o,o} = \frac{p_o}{p_o} = 1 = 100\% \text{ ou } 100$$

O preço relativo de um produto, em um período, referido ao mesmo período é sempre igual a 1 ou 100% (ou 100). Quando se pretende identificar determinada data como básica costuma-se igualá-la a 100. Se escrevermos, por exemplo, $1990 = 100$, queremos indicar que esse ano foi tomado como base de comparação.

8.4.2. Propriedade da Reversão do Tempo

Ao se permutarem dois períodos s e t , os resultados para os índices serão o inverso um do outro.

$$I_{s,t} = \frac{1}{I_{t,s}}$$

Exemplo 9: Considerando que o relativo de quantidade é 125 em 1998 com base em 1995, calcule o relativo de quantidade em 1998 com base em 1995.

Temos: $q_{95,98} = 125\%$

Que corresponde a um acréscimo de 25% ($= 125\% - 100\%$).

Para o cálculo de $q_{98,95}$, usaremos a Propriedade de Reversão do Tempo, assim:

$$q_{98,95} = \frac{1}{q_{95,98}} = \frac{1}{1,25} = \frac{100}{125} = \frac{4}{5} = 0,8 \rightarrow q_{98,95} = 80\%$$

Que corresponde a uma redução de 20% ($= 80\% - 100\%$)

8.4.3. Propriedade Circular

O valor do índice na última data, com base na primeira, será igual ao produto dos valores da série de índices cujas bases são as datas imediatamente anteriores.

$$I_{0,1} \times I_{1,2} \times I_{2,3} \times \dots \times I_{t-1,t} = I_{0,t}$$

Exemplo 10: Aplique a propriedade circular para obter o índice que é resultado do seguinte produto de índices:

$$P_{1992, 1994} \times P_{1994, 1996} \times P_{1996, 1998} \times P_{1998, 2000}$$

Solução: Na sequência acima, vamos colocar em azul a data-base do primeiro índice e também a data atual do último índice.

$$P_{1992, 1994} \times P_{1994, 1996} \times P_{1996, 1998} \times P_{1998, 2000}$$

Aplicando a propriedade circular, teremos:

$$P_{1992, 1994} \times P_{1994, 1996} \times P_{1996, 1998} \times P_{1998, 2000} = P_{1992, 2000} \text{ (resposta!)}$$

Podemos também escrever os índices de preço na forma de fração, para depois sairmos cortando. Veja:

$$\frac{P_{1994}}{P_{1992}} \times \frac{P_{1996}}{P_{1994}} \times \frac{P_{1998}}{P_{1996}} \times \frac{P_{2000}}{P_{1998}}$$

$$\text{Sobrou o seguinte: } \frac{P_{2000}}{P_{1992}}$$

E essa razão entre preços corresponde ao índice: $P_{1992, 2000}$

Exemplo 11: Um artigo foi vendido, em fevereiro, com um acréscimo de 10% em relação a janeiro; em março, com um acréscimo de 5% relativamente a fevereiro; em abril com uma queda de 4% comparativamente a março. Calcular o relativo de preço em abril com base em janeiro, e o acréscimo percentual de preço nesse período.

Solução: Variações: jan-fev = 10%; fev-mar = 5%; mar-abr = - 4%

Teremos, portanto, os seguintes relativos de preço:

$$\rightarrow p_{jan, fev} = 100\% + 10\% = 110\%$$

$$\rightarrow p_{fev, mar} = 100\% + 5\% = 105\%$$

$$\rightarrow p_{mar, abr} = 100\% - 4\% = 96\%$$

Daí, o relativo de preço em abril com relação a janeiro, utilizando a propriedade circular é:

$$P_{jan, abr} = p_{jan, fev} \times p_{fev, mar} \times p_{mar, abr} = 1,10 \times 1,05 \times 0,96 = 1,1088 = 110,88\%$$

Ou seja, houve um acréscimo de preço de 10,88% no período de janeiro a abril.

8.4.4. Decomposição das Causas (Inversão ou Reversão dos Fatores)

O produto de um número-índice de preço pelo correspondente número-índice de quantidade deve ser igual ao índice de valor.

$$\text{Índice de valor} = \text{índice de preço} \times \text{índice de quantidade}$$

Exemplo 12: Uma empresa adquiriu, em janeiro de 2003, 1.500 unidades de um componente de fabricação, ao preço unitário de R\$ 300,00 e, em fevereiro, 1.470 unidades a R\$ 330,00 cada. Calcular o valor relativo da transação em fevereiro, com base em janeiro.

Solução: Temos, pelo enunciado, que:

$$\rightarrow p_{jan} = 300 \text{ e } q_{jan} = 1.500 \text{ e}$$

$$\rightarrow p_{fev} = 330 \text{ e } q_{fev} = 1470$$

Daí, podemos calcular que:

$$p_{jan,fev} = \frac{330}{300} = 1,10 \text{ e } q_{jan,fev} = \frac{1.470}{1.500} = 0,98$$

Então, pela propriedade, teremos que:

$$v_{jan,fev} = p_{jan,fev} \times q_{jan,fev} = 1,10 \times 0,98 = 1,078 = 107,8\% \text{ ou } 107,8$$

Ou seja, houve um acréscimo de 7,8% no valor da transação.

8.5. Elos de Relativo e Relativos em Cadeia

Consideremos uma sequência de épocas $1, 2, \dots, t-1, t$ e uma série de relativos de preço $p_{1,2}, p_{2,3}, p_{3,4}, \dots, p_{t-1,t}$, onde o relativo de cada época foi calculado com base na época imediatamente anterior. Podemos afirmar que esta série de relativos é de *base móvel encadeada*.

Cada uma dessas comparações entre épocas adjacentes constitui um *elo de relativo*. Por sua vez, o *relativo em cadeia* é o índice obtido por meio da multiplicação dos elos individuais, conforme estabelece o critério circular.

Teremos, então:

a) **Elos de Relativo:** $p_{1,2}, p_{2,3}, p_{3,4}, \dots \text{ e } p_{t-1,t}$

b) **Relativo em Cadeia:** $p_{1,t} = p_{1,2} \times p_{2,3} \times p_{3,4} \times \dots \times p_{t-1,t}$

Exemplo 13: Os *elos de relativo* dos preços anuais no período de 1994 a 1998 são 120, 140, 125, 150 e 170, respectivamente. Determinar o *relativo de preço* de 1997, com base no ano de 1994.

Solução: Do enunciado, extraímos que:

$$p_{93,94} = 120; \quad p_{94,95} = 140; \quad p_{95,96} = 125; \quad p_{96,97} = 150; \quad p_{97,98} = 170$$

O relativo de preço de 1997 com base em 1994, será calculado pelo encadeamento dos *elos de relativo* (propriedade circular). Teremos, portanto:

$$p_{94,97} = p_{94,95} \times p_{95,96} \times p_{96,97}$$

$$p_{94,97} = 140\% \times 125\% \times 150\% = 1,40 \times 1,25 \times 1,50 = 2,625 = 262,5\%$$

$$p_{94,97} = 262,5\% \text{ ou } 262,5$$

8.6. Números-Índices Compostos

Expressam variações no preço, quantidade ou valor de um grupo de itens, entre duas épocas distintas.

Os Índices Compostos mais conhecidos são:

- Índice Agregativo Simples
- Índice Aritmético Simples e Ponderado
- Índice Harmônico Simples e Ponderado
- Índice Geométrico Simples e Ponderado
- Índice Agregativo Ponderado $\left\{ \begin{array}{l} \text{Índice de Laspeyres} \\ \text{Índice de Paasche} \end{array} \right.$

Dentre os índices apresentados acima, os índices de Laspeyres e Paasche são disparados os mais importantes, e os que são usualmente cobrados nos concursos.

Seguem abaixo as notações simbólicas que serão utilizadas quando da apresentação das fórmulas dos índices compostos.

Simbologia do Preço, Quantidade e Valor

- p_o : é o preço do item no ano-base;
- p_t : é o preço do item no período dado;
- q_o : é a quantidade do item no ano-base;
- q_t : é a quantidade do item no período dado.
- v_o : é o valor do item no ano-base, e $v_o = p_o \cdot q_o$;
- v_t : é o valor do item no período dado, e $v_t = p_t \cdot q_t$;

Simbologia dos Índices Simples de Preço e Quantidade

- $p_{o,t}$: é a expressão do relativo de preço de um item;
- $p_{A_{o,t}}$: é o relativo de preço do item A; $p_{B_{o,t}}$: é o relativo de preço do item B,...
- $q_{o,t}$: é a expressão do relativo de quantidade de um item;
- $q_{A_{o,t}}$: é o relativo de quantidade de A; $q_{B_{o,t}}$: é o relativo de quantidade de B,...
- n é o número de produtos ou itens (A, B, C,...) contidos no grupo, do qual se deseja calcular o índice.

8.6.1. Índice Agregativo Simples

É determinado pelo quociente entre a soma dos preços (ou das quantidades) dos produtos no ano dado e a soma dos preços (ou das quantidades) dos mesmos produtos no ano base.

$$\text{a) de Preço: } IAp_{o,t} = \frac{\sum p_t}{\sum p_o} = \frac{p_{At} + p_{Bt} + p_{Ct} + \dots}{p_{Ao} + p_{Bo} + p_{Co} + \dots}$$

$$\text{b) de Quantidade: } IAq_{o,t} = \frac{\sum q_t}{\sum q_o} = \frac{q_{At} + q_{Bt} + q_{Ct} + \dots}{q_{Ao} + q_{Bo} + q_{Co} + \dots}$$

$$\text{c) de valor: } IAv_{o,t} = \frac{\sum v_t}{\sum v_o} = \frac{v_{At} + v_{Bt} + v_{Ct} + \dots}{v_{Ao} + v_{Bo} + v_{Co} + \dots}$$

Lembre-se que o “valor” é obtido pela multiplicação entre preço e quantidade.

8.6.2. Índice Aritmético Simples

É determinado pela média aritmética dos relativos de preço (ou de quantidade) dos produtos.

$$\text{a) de Preço: } \bar{p}_{o,t} = \frac{\sum p_{o,t}}{n} = \frac{p_{Ao,t} + p_{Bo,t} + p_{Co,t} + \dots}{n}$$

$$\text{b) de Quantidade: } \bar{q}_{o,t} = \frac{\sum q_{o,t}}{n} = \frac{q_{Ao,t} + q_{Bo,t} + q_{Co,t} + \dots}{n}$$

8.6.3. Índice Aritmético Ponderado

É determinado pela média aritmética ponderada dos relativos de preço ($p_{o,t}$), tomando-se para peso a quantidade do produto no período dado (q_t).

a) de Preço:

$$\bar{p}_{o,t} = \frac{\sum (p_{o,t} \times q_t)}{\sum q_t} = \frac{(p_{Ao,t} \times q_{At}) + (p_{Bo,t} \times q_{Bt}) + (p_{Co,t} \times q_{Ct}) + \dots}{q_{At} + q_{Bt} + q_{Ct} + \dots}$$

Obs.: Na fórmula do Índice Aritmético Ponderado, também poderão ser tomados como peso a quantidade do produto na época base (substituir q_t por q_o na fórmula), ou o valor do produto na época dada (substituir q_t por v_t na fórmula), ou ainda o valor do produto na época-base (substituir q_t por v_o na fórmula). O enunciado da questão é quem definirá qual é o peso a ser utilizado.

Esta observação também vale para o índice harmônico ponderado e o índice geométrico ponderado que veremos a seguir.

8.6.4. Índice Harmônico Simples

É determinado pela média harmônica dos relativos de preço (ou de quantidade) dos produtos.

$$\text{a) de Preço: } \bar{p}_{o,t}^H = \frac{n}{\sum \frac{1}{p_{o,t}}} = \frac{n}{\frac{1}{p_{Ao,t}} + \frac{1}{p_{Bo,t}} + \frac{1}{p_{Co,t}} + \dots}$$

$$\text{b) de Quantidade: } \bar{q}_{o,t}^H = \frac{n}{\sum \frac{1}{q_{o,t}}} = \frac{n}{\frac{1}{q_{Ao,t}} + \frac{1}{q_{Bo,t}} + \frac{1}{q_{Co,t}} + \dots}$$

8.6.5. Índice Harmônico Ponderado

É determinado pela média harmônica ponderada dos relativos de preço ($p_{o,t}$), tomando-se para peso a quantidade do produto no período dado (q_t).

a) de Preço:

$$\bar{p}_{o,t}^H = \frac{\sum q_t}{\sum \frac{q_t}{p_{o,t}}} = \frac{q_{At} + q_{Bt} + q_{Ct} + \dots}{\frac{q_{At}}{p_{Ao,t}} + \frac{q_{Bt}}{p_{Bo,t}} + \frac{q_{Ct}}{p_{Co,t}} + \dots}$$

8.6.6. Índice Geométrico Simples

É determinado pela média geométrica dos relativos de preço (ou de quantidade) dos produtos.

$$\text{A) De Preço: } \bar{p}_{o,t}^G = \sqrt[n]{\prod p_{o,t}} = \sqrt[n]{p_{Ao,t} \times p_{Bo,t} \times p_{Co,t} \times \dots}$$

$$\text{b) de Quantidade: } \bar{q}_{o,t}^G = \sqrt[n]{\prod q_{o,t}} = \sqrt[n]{q_{Ao,t} \times q_{Bo,t} \times q_{Co,t} \times \dots}$$

8.6.7. Índice Geométrico Ponderado

É determinado pela média geométrica ponderada dos relativos de preço ($p_{o,t}$), tomando-se para peso a quantidade do produto no período dado (q_t).

a) de Preço:

$$\bar{p}_{o,t}^G = \sqrt[n]{\prod (p_{o,t}^{q_t})} = \sqrt[n]{p_{Ao,t}^{q_{At}} \times p_{Bo,t}^{q_{Bt}} \times p_{Co,t}^{q_{Ct}} \times \dots}$$

NOTA:

Os índices não ponderados têm a desvantagem de não se levar em consideração a importância econômica de cada produto. Portanto, de acordo com esses índices, a mesma importância seria atribuída, por exemplo, ao arroz (produto de grande consumo) e ao caviar (produto de menor consumo).

A importância econômica de cada produto é dada pelo valor monetário da quantidade vendida no mercado que estamos analisando, que pode ser obtido multiplicando a quantidade vendida pelo preço da mercadoria.

Assim, esses índices só devem ser utilizados se não for possível obter informações sobre as quantidades vendidas. Caso contrário, devem ser utilizados os índices ponderados de preço que foram vistos acima, ou os que descreveremos na próxima seção.

8.6.8. Índices Agregativos Ponderados

Neste método, haverá a multiplicação do preço de um item pela sua quantidade, desta forma aplicam-se pesos diferentes para cada produto, de acordo com sua importância relativa, ou seja, um produto que possui maior consumo influenciará mais no resultado do cálculo do índice.

Dentre os vários índices agregativos ponderados que existem, os mais usados são os *Índices de Laspeyres* e os *Índices de Paasche*.

8.6.8.1. Índice de Laspeyres (ou Método da Época Base)

Teremos aqui a ponderação dos itens em função dos preços ou quantidades da época-base.

a) de Preço

$$Lp_{0,t} = \frac{\sum (p_t \cdot q_o)}{\sum (p_o \cdot q_o)} = \frac{(p_{At} \cdot q_{Ao}) + (p_{Bt} \cdot q_{Bo}) + (p_{Ct} \cdot q_{Co}) + \dots}{(p_{Ao} \cdot q_{Ao}) + (p_{Bo} \cdot q_{Bo}) + (p_{Co} \cdot q_{Co}) + \dots}$$

É interessante discutir uma interpretação econômica do índice de Laspeyres de preço, com base na expressão acima. No numerador da fração temos $\sum (p_t \cdot q_o)$ que é o valor das quantidades dos bens (ou da produção) na época-base, aos preços da época dada. No denominador da fração temos $\sum (p_o \cdot q_o)$ que é o valor das mesmas quantidades, aos preços da época-base.

b) de Quantidade

$$Lq_{o,t} = \frac{\sum (p_o \cdot q_t)}{\sum (p_o \cdot q_o)} = \frac{(p_{Ao} \cdot q_{At}) + (p_{Bo} \cdot q_{Bt}) + (p_{Co} \cdot q_{Ct}) + \dots}{(p_{Ao} \cdot q_{Ao}) + (p_{Bo} \cdot q_{Bo}) + (p_{Co} \cdot q_{Co}) + \dots}$$

8.6.8.2. Índice de Paasche (ou Método da Época Atual)

Aqui, teremos a ponderação dos produtos em função dos preços ou quantidades da época dada ou atual.

a) de Preço

$$Pp_{o,t} = \frac{\sum (p_t \cdot q_t)}{\sum (p_o \cdot q_t)} = \frac{(p_{At} \cdot q_{At}) + (p_{Bt} \cdot q_{Bt}) + (p_{Ct} \cdot q_{Ct}) + \dots}{(p_{Ao} \cdot q_{At}) + (p_{Bo} \cdot q_{Bt}) + (p_{Co} \cdot q_{Ct}) + \dots}$$

Agora vamos discutir uma interpretação econômica do índice de Paasche de preço, com base na expressão acima. No numerador da fração temos $\sum (p_t \cdot q_t)$ que é o valor das quantidades dos bens (ou da produção) na época atual, aos preços dessa mesma época. No denominador da fração temos $\sum (p_o \cdot q_t)$ que é o valor das mesmas quantidades, aos preços da época-base.

b) de Quantidade

$$Pq_{o,t} = \frac{\sum (p_t \cdot q_t)}{\sum (p_t \cdot q_o)} = \frac{(p_{At} \cdot q_{At}) + (p_{Bt} \cdot q_{Bt}) + (p_{Ct} \cdot q_{Ct}) + \dots}{(p_{At} \cdot q_{Ao}) + (p_{Bt} \cdot q_{Bo}) + (p_{Ct} \cdot q_{Co}) + \dots}$$

→ Veja como é fácil memorizar os índices de *Laspeyres e Paasche*:

Todas as fórmulas são da forma: $\frac{\sum (p \cdot q)}{\sum (p \cdot q)}$, variando somente os subscritos dos preços

e quantidades de uma fórmula para outra.

1) Índices de **Preço** de Laspeyres e Paasche:

1ª Passo: Se estivermos interessados em calcular o índice de preço (a fim de obter a variação relativa de preço), então, na fórmula, quem deve variar é o preço (subscrito do preço do numerador na data t, e subscrito do preço do denominador na data-base) e as quantidades devem referir-se a uma mesma data. Assim, inicialmente temos:

$$\frac{\sum (p_t \cdot q)}{\sum (p_o \cdot q)}$$

2ª Passo: Já sabemos que os subscritos das quantidades devem ser os mesmos tanto no numerador quanto no denominador, resta-nos saber se utilizaremos a data atual ou a data-base, que vai depender de qual índice se deseja: Laspeyres ou Paasche.

– **Laspeyres**: é o método da época básica, portanto consideraremos as quantidades da época básica (q_o). E, finalmente:

$$\frac{\sum (p_t \cdot q_o)}{\sum (p_o \cdot q_o)}$$

– **Paasche**: é o método da época atual, portanto consideraremos as quantidades da época dada ou atual (q_t). E, finalmente:

$$\frac{\sum (p_t \cdot q_t)}{\sum (p_o \cdot q_t)}$$

2) Índices de **Quantidade** de Laspeyres e Paasche:

1ª Passo: Se estivermos interessados em calcular o índice de quantidade (a fim de obter a variação relativa da quantidade), então, na fórmula, quem deve variar é a quantidade (subscrito da quantidade do numerador na data t, e subscrito da quantidade do denominador na data base) e os preços devem referir-se a uma mesma data. Assim, inicialmente teremos:

$$\frac{\sum (p \cdot q_t)}{\sum (p \cdot q_o)}$$

2º Passo: Já sabemos que os subscritos dos preços devem ser os mesmos tanto no numerador quanto no denominador, resta-nos saber se utilizaremos a data atual ou a data-base, que vai depender de qual índice se deseja: Laspeyres ou Paasche.

– **Laspeyres**: é o método da época básica, portanto consideraremos os preços da época básica (p_o).

$$\frac{\sum (p_o \cdot q_t)}{\sum (p_o \cdot q_o)}$$

– **Paasche**: é o método da época atual, portanto consideraremos os preços da época dada ou atual (p_t).

$$\frac{\sum (p_t \cdot q_t)}{\sum (p_t \cdot q_o)}$$

E é só! Entendendo essas explicações, você nunca mais esquecerá as importantes fórmulas de Laspeyres e Paasche.

Notas:

- I. Das propriedades apresentadas na seção 4 deste capítulo, somente a propriedade da Identidade é atendida pelos índices de Laspeyres e Paasche.
- II. Quando para cada produto o preço e a quantidade se movem na mesma direção, isto é, o preço e a quantidade de um produto aumentam ou o preço e a quantidade do produto diminuem, então teremos o valor do índice de Paasche maior que o de Laspeyres.
- III. Quando para cada produto o preço e a quantidade se movem em direções opostas, isto é, o preço diminui e a quantidade aumenta ou o preço aumenta e a quantidade diminui, então teremos o valor do índice de Laspeyres maior que o de Paasche.
- IV. O índice de Paasche é obtido por meio das quantidades consumidas finais (atuais). Portanto, é necessário pesquisar quantidades com a mesma periodicidade que se pesquisam preços, o que torna a pesquisa muito trabalhosa e cara. Não é surpreendente, portanto, que os institutos que pesquisam preços sistematicamente prefiram o índice de Laspeyres.
- V. O índice de preço de Laspeyres tende a superestimar as variações de preço, enquanto o índice de Paasche tende a subestimá-las. Veja abaixo as explicações dessas tendências.

A superestimação da inflação pelo índice de Laspeyres se deve à presença do q_o no numerador da fórmula.

Quando ocorre um aumento de preços há uma tendência da redução das quantidades vendidas, ou seja, espera-se que q_t seja menor que q_o . Como o valor q_o é maior que q_t , então o produto $(p_t \cdot q_o)$ presente no numerador do índice de Laspeyres será maior do que o produto $(p_t \cdot q_t)$. Então com um numerador maior, o índice superestimarà a inflação.

No caso do índice de Paasche, os papéis desempenhados pelas quantidades do ano base e do ano dado são permutados, em relação aos do caso do índice de Laspeyres. Essa permutação tende a tornar o índice de Paasche,

$\frac{\sum (p_t \cdot q_t)}{\sum (p_o \cdot q_t)}$, inferior ao que deveria ser.

Exemplo 14: Utilize a tabela abaixo para calcular cada um dos índices compostos solicitados nos itens de A a J.

Tabela de preços e quantidades vendidas dos produtos A e B nos anos de 1998 e 1999.

Produto	1998		1999	
	Preço unitário	Quantidade vendida	Preço unitário	Quantidade vendida
A	20	100	30	80
B	30	160	36	200

- A) Calcular os *relativos de preço e quantidade* dos produtos A e B em 1999, com base em 1998.

$$\text{Produto A: } p_{98,99} = \frac{30}{20} = 1,5 = 150\% \text{ e } q_{98,99} = \frac{80}{100} = 0,8 = 80\%$$

$$\text{Produto B: } p_{98,99} = \frac{36}{30} = 1,2 = 120\% \text{ e } q_{98,99} = \frac{200}{160} = 1,25 = 125\%$$

Relativos de Preço de A e B

Produto	1998	1999
A	100	150
B	100	120

Relativos de Quantidade de A e B

Produto	1998	1999
A	100	80
B	100	125

- B) Cálculo do Índice Agregativo Simples de preço, quantidade e valor em 1999, com base em 1998:

$$\rightarrow IAp_{98,99} = \frac{30 + 36}{20 + 30} = \frac{66}{50} = 1,32 = 132\% \text{ ou } 132$$

Ou seja, por esse índice tivemos um aumento de 32% nos preços.

$$\rightarrow IAq_{98,99} = \frac{80 + 200}{100 + 160} = \frac{280}{260} = 1,077 = 107,7\% \text{ ou } 107,7$$

Logo, tivemos um aumento de 7,7% nas quantidades.

$$\rightarrow IAv_{98,99} = \frac{30 \times 80 + 36 \times 200}{20 \times 100 + 30 \times 160} = \frac{9600}{6800} = 1,412 = 141,2\% \text{ ou } 141,2$$

E por esse índice tivemos um aumento de 41,2% no faturamento.