

Sérgio CARVALHO  
Weber CAMPOS

# ESTATÍSTICA INFERENCIAL

*Simplificada*

3ª

edição

2027



EDITORA  
JusPODIVM

[www.editorajuspodivm.com.br](http://www.editorajuspodivm.com.br)

# Capítulo 3

## Distribuições Contínuas de Probabilidade

### 1. INTRODUÇÃO

Uma variável aleatória contínua pode assumir qualquer valor dentro de certo intervalo. São variáveis geralmente relacionadas a uma medição. Como exemplos, citamos: peso de uma pessoa adulta; altura de um aluno universitário; tempo de duração de uma maratona; temperatura ao longo do dia numa cidade; diâmetro de uma peça fabricada por uma metalúrgica; volume diário de cocaína líquida apreendida por agentes da Polícia Federal; preço de mercado de um produto; orçamento gasto com educação nos municípios de certo estado, etc. Essas variáveis possuem distribuições de probabilidades contínuas.

As principais distribuições contínuas de probabilidade são as seguintes:

- 1) Distribuição NORMAL
- 2) Distribuição Contínua UNIFORME
- 3) Distribuição EXPONENCIAL
- 4) Distribuição T DE STUDENT
- 5) Distribuição do QUI-QUADRADO

A Distribuição Contínua Normal é a mais conhecida e cobrada nas provas de concursos, e, portanto, será a mais explorada neste capítulo.

A distribuição T de Student será vista dentro dos capítulos de Intervalo de Confiança e Testes de Hipótese, enquanto a distribuição do Qui-quadrado será vista no Capítulo 10.

### 2. DISTRIBUIÇÃO NORMAL

#### 2.1. Definição e Características da Distribuição Normal

A mais importante distribuição contínua de probabilidade é a *distribuição normal* (ou *curva normal*), também conhecida como *distribuição de Gauss* (ou *curva de Gauss*).

Muitas das variáveis analisadas nas pesquisas socioeconômicas correspondem à distribuição normal ou dela se aproximam. Exemplos de distribuições normais: pesos de jogadores profissionais de basquete; estatura de crianças da 5ª série do ensino fundamental; preços da gasolina nos postos de combustível; etc.

A distribuição normal pode ser cobrada dentro de outros assuntos da Estatística (Intervalo de Confiança, Testes de Hipóteses...) ou simplesmente numa questão de probabilidade, como veremos mais adiante.

A curva Normal (também conhecida como curva de Gauss) é construída pela seguinte função:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

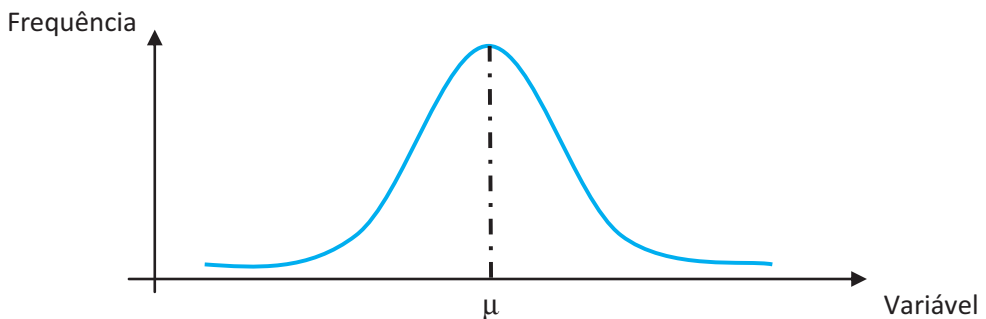
Calma, não é preciso decorar esta função. Ela serve apenas para sabermos que haverá infinitas *curvas normais*, cada uma delas definidas pela **média** ( $\mu$ ) e pela **variância** ( $\sigma^2$ ) do conjunto. Ou seja, média e variância são os parâmetros de uma distribuição normal.

Assim, se uma variável tem distribuição normal, diremos que:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

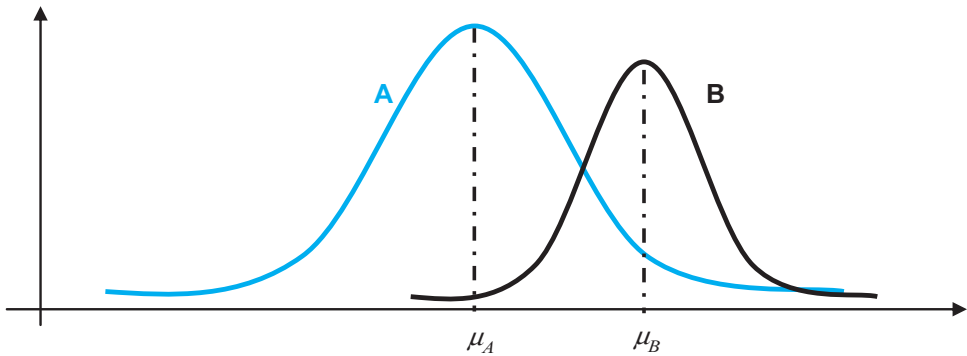
Essa função  $f(x)$  da curva normal é chamada de função densidade de probabilidade da curva normal. E, como o próprio nome sugere, ela será usada para a obtenção de probabilidades.

→ Características da Curva Normal:



- A Curva Normal tem forma de sino.
- É simétrica (média = mediana = moda).
- É unimodal.
- É classificada como Mesocúrtica.
- Prolonga-se de  $-\infty$  a  $+\infty$ .
- Ela fica especificada pela sua média ( $\mu$ ) e seu desvio-padrão ( $\sigma$ ).

No desenho a seguir, são apresentadas duas curvas normais, designadas por A e B.



A partir do desenho acima, pode-se concluir:

- A curva normal B, por estar mais à direita do que a curva A, possui média maior do que a da curva normal A:  $\mu_A < \mu_B$ .
- A curva normal A, por ser mais larga (maior espalhamento) do que a curva B, tem desvio padrão maior do que o da curva normal B:  $\sigma_A > \sigma_B$ .

Passemos a uma questão de concurso:

**Exemplo 01. (CLÁSSICA)** Se  $x$  é uma v. a. – variável aleatória com função densidade de probabilidade  $f(x)$ , caracterizada pelo modelo normal, podemos afirmar que:

- a) o desvio-padrão é igual a 1 (um).
- b) a média tem valor 0 (zero).
- c) a função de distribuição acumulada  $F(x)$  é igual a 1, para todos os valores acima de b.
- d) os parâmetros média, moda e mediana são iguais.
- e) a variância tem o valor do quadrado da média.

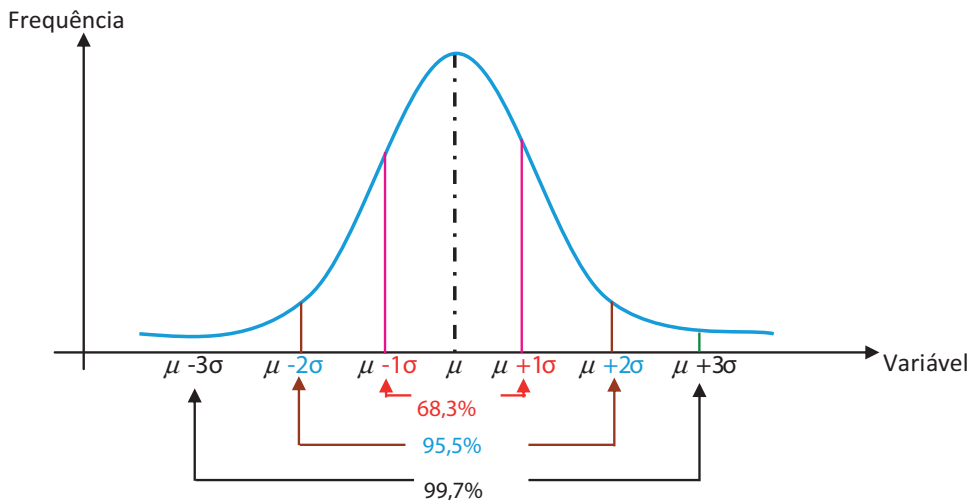
**Solução:**

A **Distribuição Normal** apresenta as seguintes características: ela é simétrica, unimodal e mesocúrtica. E a curva normal fica especificada pela sua média ( $\mu$ ) e seu desvio-padrão ( $\sigma$ ).

A **Distribuição Normal Padrão** apresenta as mesmas características acima, mas com valor fixo para a média ( $\mu=0$ ) e para o desvio padrão ( $\sigma=1$ ).

O enunciado da questão trata de uma Distribuição Normal qualquer, e não particularmente da Normal Padrão. Desse modo, a resposta correta é a **alternativa D**.

Sobre a concentração dos valores dentro da curva normal, temos três regiões a destacar:



Significa que se uma variável tem distribuição normal, cerca de **68,3%** de seus valores cairão no intervalo de um desvio padrão ( $1\sigma$ ) a contar de cada lado da média ( $\mu$ ); cerca de **95,5%** no intervalo de dois desvios padrões ( $2\sigma$ ) a contar da média; e cerca de **99,7%** no intervalo de três desvios padrões ( $3\sigma$ ) a contar da média.

Em termos de Probabilidade, pode-se afirmar:

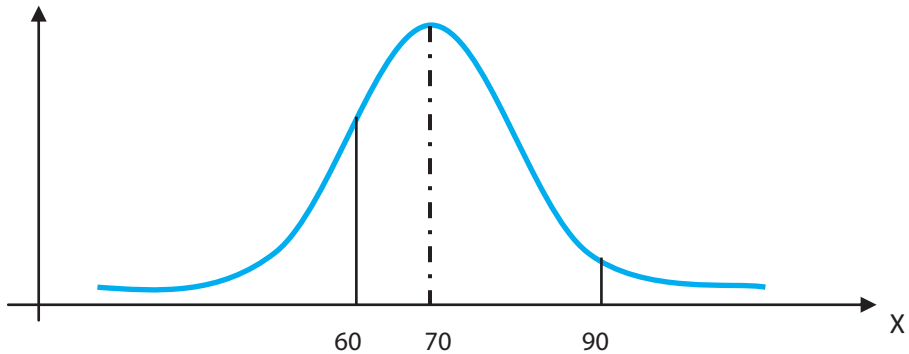
$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = \mathbf{68,3\%}$ ;  $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = \mathbf{95,5\%}$ ; e  $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = \mathbf{99,7\%}$ .

Observe bem esses percentuais de elementos nesses três intervalos para você ter uma ideia da concentração (distribuição) deles na curva normal.

São comuns em provas de Estatística questões de cálculo de probabilidade com a Distribuição Normal. Para reconhecer esse tipo de questão, normalmente ela perguntará por uma probabilidade relacionada a um intervalo e dirá respeito a uma **variável contínua normal**. Exemplos:

- Qual a probabilidade de que uma pessoa pese entre 45 kg e 58 kg?
- Qual a probabilidade de que uma pessoa pese acima de 72 kg? (Intervalo: de 72 kg até *mais infinito*)
- Qual a probabilidade de que uma pessoa gaste, para ler um jornal, entre 32 minutos e 43 minutos?
- Qual a probabilidade de que uma pessoa gaste menos de 25 minutos para ler um jornal? (Intervalo: de *menos infinito* até 25 minutos).

Antes de iniciarmos o cálculo da probabilidade na curva normal, veja o desenho a seguir para entender alguns fundamentos básicos da curva normal.



Do desenho acima, percebe-se que a média da variável  $X$  é igual a 70. Veja algumas deduções de probabilidade com base apenas nos dados do desenho acima.

→  $P(X = 70 \text{ kg}) = \text{zero}$  (em qualquer variável contínua, a probabilidade no ponto é sempre zero)

→  $P(X \geq 70 \text{ kg}) = P(X > 70 \text{ kg}) = 50\%$  (pois ocupa a metade da área total)

→  $P(X > 90 \text{ kg})$  = corresponde à área sob a curva que está à direita de  $x=90$ . Não tem como calcular no momento. É preciso consultar a tabela da curva normal padrão.

→  $P(60 \leq X \leq 90) = P(60 < X < 90)$  = corresponde à área sob a curva que fica entre  $x=60$  e  $x=90$ . Não tem como calcular no momento. É preciso consultar a tabela da curva normal padrão.

## 2.2. Distribuição Normal Padronizada

Se são infinitas as curvas normais, precisaríamos de infinitas tabelas para nos auxiliar no cálculo da área sob a curva normal.

Para evitar esse problema, foi construída uma tabela única para consulta das áreas (probabilidades), chamada de **Tabela da Curva Normal Padronizada!**

Esta Curva Normal Padronizada apresenta:  $\mu=0$  e  $\sigma=1$ .

A variável **normal padronizada** será chamada de  $Z$ .

Qualquer distribuição normal particular ( $X$ ) pode ser transformada na variável normal padronizada ( $Z$ ), da seguinte forma:

$$Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x}$$

Onde:

$\mu_x$  = média da variável  $X$ ;  $\sigma_x$  = desvio-padrão da variável  $X$ .

O valor de  $Z$  obtido é chamado de **Escore Padronizado**.

No cálculo da probabilidade, fazendo essa transformação, encontraremos na tabela a área sob a curva normal padronizada, e que corresponderá à probabilidade que estamos procurando.

Antes de passarmos ao cálculo da probabilidade, vamos treinar por meio de alguns exemplos a transformação da variável  $X$  em  $Z$  e vice-versa.

**Exemplo 02.** Considere que a variável  $X$  representa a nota no exame final de Matemática, a média de  $X$  é 72 e o desvio padrão de  $X$  é 15. Determinar o escore padronizado dos estudantes que obtiveram graus:

i.  $X=60$

ii.  $X=93$

iii.  $X=72$

E agora determine os graus correspondentes aos escores padronizados:

iv.  $Z = -1$

v.  $Z = 1,6$ .

**Solução:**

1º) Para  $X=60$ :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{60 - 72}{15} = \frac{-12}{15} = \frac{-4}{5} = -0,8 \text{ (é negativo, pois o valor de } X \text{ é menor que a média.)}$$

2º) Para  $X=93$ :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{93 - 72}{15} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5} = 1,4 \text{ (é positivo, pois o valor de } X \text{ é maior que a média.)}$$

3º) Para  $X=72$ :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{72 - 72}{15} = \frac{0}{15} = 0 \text{ (é nulo, pois o valor de } X \text{ é igual ao valor da média.)}$$

Agora temos que encontrar o valor de  $X$  correspondente ao valor de  $Z$  (escore padronizado) que foi fornecido:

4º) Para  $Z = -1$ :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \rightarrow -1 = \frac{X - 72}{15} \rightarrow -15 = X - 72 \rightarrow X = 72 - 15 \rightarrow X = 57$$

5º) Para  $Z = 1,6$ :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \rightarrow 1,6 = \frac{X - 72}{15} \rightarrow 24 = X - 72 \rightarrow X = 72 + 24 \rightarrow X = 96$$

Aproveitando os dados do exemplo acima, caso uma questão peça a probabilidade  $P(X > 60)$ , então se deve calcular o escore padronizado referente ao valor 60, que resultará

em  $z = -0,8$ . Assim, pode-se afirmar que  $P(X > 60) = P(Z > -0,8)$ . Depois, consulta-se a tabela da Normal Padrão para obter essa probabilidade.

No próximo exemplo, vamos aprender que os escores padronizados podem ser utilizados na comparação de grupos que apresentam características diferentes.

**Exemplo 03. (CLÁSSICA)** Em um concurso público, a nota média da prova de inglês foi igual a 7 com desvio-padrão igual a 2. Por outro lado, a nota média da prova de lógica foi igual a 7,5 com desvio-padrão igual a 4. Naná obteve nota 8 em Inglês e nota 8 em Lógica. Nené obteve nota 7,5 em Inglês e 8,5 em Lógica. Nini obteve 7,5 em Inglês e 9 em Lógica. Com relação à melhor posição relativa – ou ao melhor desempenho –, pode-se afirmar que o desempenho de

- Naná foi o mesmo em Inglês e Lógica.
- Nini foi melhor em Lógica do que o de Naná em Inglês.
- Nené foi melhor em lógica do que o de Naná em Inglês.
- Nené foi o mesmo em Inglês e Lógica.
- Nené foi melhor em Lógica do que em Inglês.

### Solução:

Para efetuar a comparação das notas de Inglês com as notas de Lógica, é preciso antes transformar as notas em escores padronizados, pois o nível de dificuldade dessas duas provas, indicadas pela média e desvio-padrão, parece ser diferente.

Utilizaremos os seguintes dados no cálculo dos escores padronizados:

➤ **Nota da prova de Inglês:** média = 7 e desvio-padrão = 2.

➤ **Nota da prova de Lógica:** média = 7,5 e desvio-padrão = 4.

**1º) Notas de Naná:** ela obteve nota 8 em Inglês e nota 8 em Lógica.

$$\text{Nota de Inglês padronizada} = \frac{8-7}{2} = \frac{1}{2} = 0,500$$

$$\text{Nota de Lógica padronizada} = \frac{8-7,5}{4} = \frac{0,5}{4} = \frac{1}{8} = 0,125$$

**2º) Notas de Nené:** ela obteve nota 7,5 em Inglês e 8,5 em Lógica.

$$\text{Nota de Inglês padronizada} = \frac{7,5-7}{2} = \frac{0,5}{2} = \frac{1}{4} = 0,250$$

$$\text{Nota de Lógica padronizada} = \frac{8,5-7,5}{4} = \frac{1}{4} = 0,250$$

**3º) Notas de Nini:** ela obteve 7,5 em Inglês e 9 em Lógica.

$$\text{Nota de Inglês padronizada} = \frac{7,5-7}{2} = \frac{0,5}{2} = \frac{1}{4} = 0,250$$

$$\text{Nota de Lógica padronizada} = \frac{9-7,5}{4} = \frac{1,5}{4} = \frac{3}{8} = 0,375$$

A partir dos resultados das notas padronizadas, pode-se afirmar que:

- Naná teve um melhor desempenho em Inglês do que em Lógica;
- Nené teve o melhor desempenho em Inglês e Lógica;
- Nini teve um melhor desempenho em Lógica do que em Inglês.

Analisando cada uma das alternativas, conclui-se que a resposta correta é a **alternativa D**.

### 2.3. Cálculo da Probabilidade na Distribuição Normal

Vimos nas seções anteriores algumas informações sobre o cálculo da probabilidade na distribuição normal. Agora, vamos passar ao cálculo efetivo dessa probabilidade.

Suponhamos que um conjunto represente os pesos de um grupo de crianças. Para este conjunto, verificou-se que a média dos pesos era de  $\mu = 25$  kg e o desvio padrão era de  $\sigma = 4$  kg. Consideremos ainda que se saiba que esta variável peso se distribui normalmente.

Perceba agora na pergunta que será feita: *sabendo que a variável  $X$  tem distribuição normal, qual a probabilidade de que uma criança qualquer deste conjunto apresente peso variando entre 25 e 28 quilogramas?*

Está claro que no estudo da probabilidade associada à distribuição normal, estaremos sempre investigando a probabilidade referente a um **intervalo** da variável. Neste caso, a primeira coisa a fazer é reduzir a variável  $X$  à variável padronizada  $Z$ . Os dois valores de  $X$  que conhecemos são 25 e 28. Assim, usando a fórmula da redução, teremos:

$$\rightarrow \text{Para } x = 25 \rightarrow z = \frac{x - \mu}{\sigma} \rightarrow z = \frac{25 - 25}{4} \rightarrow z = 0$$

$$\rightarrow \text{Para } x = 28 \rightarrow z = \frac{x - \mu}{\sigma} \rightarrow z = \frac{28 - 25}{4} \rightarrow z = 0,75$$

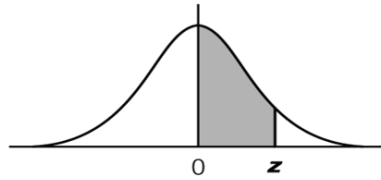
Assim, realizamos a transformação da variável, e já estamos trabalhando com a Curva Normal Padronizada. Modificou-se, portanto, a pergunta da questão.

A nova pergunta agora é a seguinte: considerando a Curva Normal Padronizada (ou Reduzida), qual a probabilidade de  $Z$  estar dentro do intervalo que vai de  $z=0$  até  $z=0,75$ ?

E para esta pergunta, existe uma tabela prontinha, que nos dará a resposta quase que de forma imediata: **A Tabela da Distribuição Normal Padronizada**. Precisamos conhecer bem como se faz a pesquisa a esta tabela, pois é por meio dela que chegaremos à solução desejada. Já é do conhecimento de todos que a curva normal é simétrica em torno da média aritmética, e que cada metade da área sob a curva representa 50%.

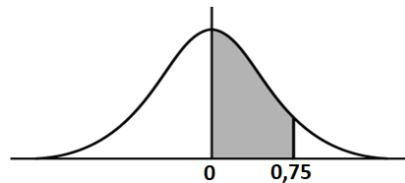
## IMPORTANTE:

A tabela abaixo da Curva Normal Padronizada nos indica o percentual de elementos que está no intervalo que vai de  $z=0$  até um  $z$  qualquer.



| z   | .00    | .01    | .02    | .03    | .04    | .05    | .06    | .07    | .08    | .09    |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0,0000 | 0,0040 | 0,0080 | 0,0120 | 0,0160 | 0,0199 | 0,0239 | 0,0279 | 0,0319 | 0,0359 |
| 0.1 | 0,0398 | 0,0438 | 0,0478 | 0,0517 | 0,0557 | 0,0596 | 0,0636 | 0,0675 | 0,0714 | 0,0753 |
| 0.2 | 0,0793 | 0,0832 | 0,0871 | 0,0910 | 0,0948 | 0,0987 | 0,1026 | 0,1064 | 0,1103 | 0,1141 |
| 0.3 | 0,1179 | 0,1217 | 0,1255 | 0,1293 | 0,1331 | 0,1368 | 0,1406 | 0,1443 | 0,1480 | 0,1517 |
| 0.4 | 0,1554 | 0,1591 | 0,1628 | 0,1664 | 0,1700 | 0,1736 | 0,1772 | 0,1808 | 0,1844 | 0,1879 |
| 0.5 | 0,1915 | 0,1950 | 0,1985 | 0,2019 | 0,2054 | 0,2088 | 0,2123 | 0,2157 | 0,2190 | 0,2224 |
| 0.6 | 0,2257 | 0,2291 | 0,2324 | 0,2357 | 0,2389 | 0,2422 | 0,2454 | 0,2486 | 0,2517 | 0,2549 |
| 0.7 | 0,2580 | 0,2611 | 0,2642 | 0,2673 | 0,2704 | 0,2734 | 0,2764 | 0,2794 | 0,2823 | 0,2852 |
| 0.8 | 0,2881 | 0,2910 | 0,2939 | 0,2967 | 0,2995 | 0,3023 | 0,3051 | 0,3078 | 0,3106 | 0,3133 |
| 0.9 | 0,3159 | 0,3186 | 0,3212 | 0,3238 | 0,3264 | 0,3290 | 0,3315 | 0,3340 | 0,3365 | 0,3389 |
| 1.0 | 0,3413 | 0,3438 | 0,3461 | 0,3485 | 0,3508 | 0,3531 | 0,3554 | 0,3577 | 0,3599 | 0,3621 |
| 1.1 | 0,3643 | 0,3665 | 0,3686 | 0,3708 | 0,3729 | 0,3749 | 0,3770 | 0,3790 | 0,3810 | 0,3830 |
| 1.2 | 0,3849 | 0,3869 | 0,3869 | 0,3907 | 0,3925 | 0,3944 | 0,3962 | 0,3980 | 0,3997 | 0,4015 |

No caso, desejamos conhecer o percentual que há entre  $z=0$  e  $z=0,75$ . Ilustrativamente, teremos:



A consulta a esta tabela se faz olhando-se primeiramente para a coluna da esquerda, e em seguida para a primeira linha.

Não esqueçamos que as porcentagens constantes no *miolo* da tabela representam a área sob a curva normal, delimitada pela linha do  $z=0$  e de um outro valor de  $z$  qualquer. Assim, na tabela acima, procuraremos sempre por este  $z$  qualquer.

Se queremos, como em nosso exemplo, descobrir a porcentagem de elementos entre  $z=0$  e  $z=0,75$ , interessa-nos encontrar este **0,75** na tabela. Começamos procurando pelo

**0,7** na coluna da esquerda. Uma vez encontrado, correremos nossa vista pela linha de cima, procurando pelo **0,05**. E por que isso? Porque **0,75** é o mesmo que **0,7** (encontrado na coluna da esquerda) + **0,05** (encontrado na linha de cima).

Vejam na tabela:

| z          | .00    | .01    | .02    | .03    | .04    | .05           | .06    | .07    | .08    | .09    |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|---------------|--------|--------|--------|--------|
| <b>0.0</b> | 0,0000 | 0,0040 | 0,0080 | 0,0120 | 0,0160 | 0,0199        | 0,0239 | 0,0279 | 0,0319 | 0,0359 |
| <b>0.1</b> | 0,0398 | 0,0438 | 0,0478 | 0,0517 | 0,0557 | 0,0596        | 0,0636 | 0,0675 | 0,0714 | 0,0753 |
| <b>0.2</b> | 0,0793 | 0,0832 | 0,0871 | 0,0910 | 0,0948 | 0,0987        | 0,1026 | 0,1064 | 0,1103 | 0,1141 |
| <b>0.3</b> | 0,1179 | 0,1217 | 0,1255 | 0,1293 | 0,1331 | 0,1368        | 0,1406 | 0,1443 | 0,1480 | 0,1517 |
| <b>0.4</b> | 0,1554 | 0,1591 | 0,1628 | 0,1664 | 0,1700 | 0,1736        | 0,1772 | 0,1808 | 0,1844 | 0,1879 |
| <b>0.5</b> | 0,1915 | 0,1950 | 0,1985 | 0,2019 | 0,2054 | 0,2088        | 0,2123 | 0,2157 | 0,2190 | 0,2224 |
| <b>0.6</b> | 0,2257 | 0,2291 | 0,2324 | 0,2357 | 0,2389 | 0,2422        | 0,2454 | 0,2486 | 0,2517 | 0,2549 |
| <b>0.7</b> | 0,2580 | 0,2611 | 0,2642 | 0,2673 | 0,2704 | <b>0,2734</b> | 0,2764 | 0,2794 | 0,2823 | 0,2852 |
| <b>0.8</b> | 0,2881 | 0,2910 | 0,2939 | 0,2967 | 0,2995 | 0,3023        | 0,3051 | 0,3078 | 0,3106 | 0,3133 |
| <b>0.9</b> | 0,3159 | 0,3186 | 0,3212 | 0,3238 | 0,3264 | 0,3290        | 0,3315 | 0,3340 | 0,3365 | 0,3389 |
| <b>1.0</b> | 0,3413 | 0,3438 | 0,3461 | 0,3485 | 0,3508 | 0,3531        | 0,3554 | 0,3577 | 0,3599 | 0,3621 |
| <b>1.1</b> | 0,3643 | 0,3665 | 0,3686 | 0,3708 | 0,3729 | 0,3749        | 0,3770 | 0,3790 | 0,3810 | 0,3830 |
| <b>1.2</b> | 0,3849 | 0,3869 | 0,3869 | 0,3907 | 0,3925 | 0,3944        | 0,3962 | 0,3980 | 0,3997 | 0,4015 |

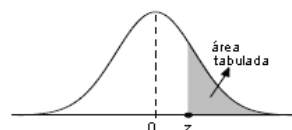
Qual foi o resultado encontrado? Foi **0,2734**. Isso significa que **27,34%** dos elementos do conjunto estão localizados entre o  $z=0$  e o  $z=0,75$ . Ou, dito de outra forma, **27,34%** dos elementos situam-se entre os pesos 25kg e 28kg.

Concluimos: a probabilidade de que uma criança qualquer desse conjunto apresente peso entre 25 kg e 28 kg é **27,34%** (ou de **0,2734**).

Como já sabemos, para encontrar a probabilidade envolvendo a distribuição normal, é preciso que seja fornecida a tabela da normal padronizada. Numa prova, a tabela normal padronizada pode vir de várias formas. Veja algumas tabelas retiradas de algumas provas de concurso.

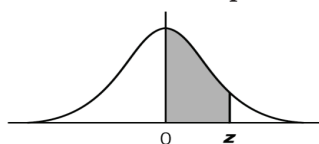
**TABELA 01:** Conforme se pode ver no desenho da curva normal a seguir, a área destacada no desenho indica que a tabela fornece a probabilidade  $P(Z \geq z)$ .

Tábua da Distribuição normal padrão.



| z   | segunda decimal de z |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-----|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|     | 0,00                 | 0,01   | 0,02   | 0,03   | 0,04   | 0,05   | 0,06   | 0,07   | 0,08   | 0,09   |
| 0,0 | 0,5000               | 0,4960 | 0,4920 | 0,4880 | 0,4840 | 0,4801 | 0,4761 | 0,4721 | 0,4681 | 0,4641 |
| 0,1 | 0,4602               | 0,4562 | 0,4522 | 0,4483 | 0,4443 | 0,4404 | 0,4364 | 0,4325 | 0,4286 | 0,4247 |
| 0,2 | 0,4207               | 0,4168 | 0,4129 | 0,4090 | 0,4052 | 0,4013 | 0,3974 | 0,3936 | 0,3897 | 0,3859 |
| 0,3 | 0,3821               | 0,3783 | 0,3745 | 0,3707 | 0,3669 | 0,3632 | 0,3594 | 0,3557 | 0,3520 | 0,3483 |
| 0,4 | 0,3446               | 0,3409 | 0,3372 | 0,3336 | 0,3300 | 0,3264 | 0,3228 | 0,3192 | 0,3156 | 0,3121 |
| 0,5 | 0,3085               | 0,3050 | 0,3015 | 0,2981 | 0,2946 | 0,2912 | 0,2877 | 0,2842 | 0,2810 | 0,2776 |
| 0,6 | 0,2743               | 0,2709 | 0,2676 | 0,2643 | 0,2611 | 0,2578 | 0,2546 | 0,2514 | 0,2483 | 0,2451 |
| 0,7 | 0,2420               | 0,2389 | 0,2358 | 0,2327 | 0,2296 | 0,2266 | 0,2236 | 0,2206 | 0,2177 | 0,2148 |
| 0,8 | 0,2119               | 0,2090 | 0,2061 | 0,2033 | 0,2005 | 0,1977 | 0,1949 | 0,1922 | 0,1894 | 0,1867 |
| 0,9 | 0,1841               | 0,1814 | 0,1788 | 0,1762 | 0,1736 | 0,1711 | 0,1685 | 0,1660 | 0,1635 | 0,1611 |
| 1,0 | 0,1587               | 0,1562 | 0,1539 | 0,1515 | 0,1492 | 0,1469 | 0,1446 | 0,1423 | 0,1401 | 0,1379 |
| 1,1 | 0,1357               | 0,1335 | 0,1314 | 0,1292 | 0,1271 | 0,1251 | 0,1230 | 0,1210 | 0,1190 | 0,1170 |
| 1,2 | 0,1151               | 0,1131 | 0,1112 | 0,1093 | 0,1075 | 0,1056 | 0,1038 | 0,1020 | 0,1003 | 0,0985 |
| 1,3 | 0,0968               | 0,0951 | 0,0934 | 0,0918 | 0,0901 | 0,0885 | 0,0869 | 0,0853 | 0,0838 | 0,0823 |
| 1,4 | 0,0808               | 0,0793 | 0,0778 | 0,0764 | 0,0749 | 0,0735 | 0,0722 | 0,0708 | 0,0694 | 0,0681 |

**TABELA 02:** Conforme se pode ver no desenho da curva normal a seguir, a área destacada no desenho indica que a tabela fornece a probabilidade  $P(0 \leq Z \leq z)$ .



Área sob a Curva Normal Padronizada de 0 a z

| z   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,0 | ,0000 | ,0040 | ,0080 | ,0120 | ,0160 | ,0199 | ,0239 | ,0279 | ,0319 | ,0359 |
| 0,1 | ,0398 | ,0438 | ,0478 | ,0517 | ,0557 | ,0596 | ,0636 | ,0675 | ,0714 | ,0754 |
| 0,2 | ,0793 | ,0832 | ,0871 | ,0910 | ,0948 | ,0987 | ,1026 | ,1064 | ,1103 | ,1141 |
| 0,3 | ,1179 | ,1217 | ,1255 | ,1293 | ,1331 | ,1368 | ,1406 | ,1443 | ,1480 | ,1517 |
| 0,4 | ,1554 | ,1591 | ,1628 | ,1664 | ,1700 | ,1736 | ,1772 | ,1808 | ,1844 | ,1879 |
| 0,5 | ,1915 | ,1950 | ,1985 | ,2019 | ,2054 | ,2088 | ,2123 | ,2157 | ,2190 | ,2224 |
| 0,6 | ,2258 | ,2291 | ,2324 | ,2357 | ,2389 | ,2422 | ,2454 | ,2486 | ,2518 | ,2549 |
| 0,7 | ,2580 | ,2612 | ,2642 | ,2673 | ,2704 | ,2734 | ,2764 | ,2794 | ,2823 | ,2852 |
| 0,8 | ,2881 | ,2910 | ,2939 | ,2967 | ,2996 | ,3023 | ,3051 | ,3078 | ,3106 | ,3133 |
| 0,9 | ,3159 | ,3186 | ,3212 | ,3238 | ,3264 | ,3289 | ,3315 | ,3340 | ,3365 | ,3389 |
| 1,0 | ,3413 | ,3438 | ,3461 | ,3485 | ,3508 | ,3531 | ,3554 | ,3577 | ,3599 | ,3621 |
| 1,1 | ,3643 | ,3665 | ,3686 | ,3708 | ,3729 | ,3749 | ,3770 | ,3790 | ,3810 | ,3830 |
| 1,2 | ,3849 | ,3869 | ,3888 | ,3907 | ,3925 | ,3944 | ,3962 | ,3980 | ,3997 | ,4015 |
| 1,3 | ,4032 | ,4049 | ,4066 | ,4082 | ,4099 | ,4115 | ,4131 | ,4147 | ,4162 | ,4177 |
| 1,4 | ,4192 | ,4207 | ,4222 | ,4236 | ,4251 | ,4265 | ,4279 | ,4292 | ,4306 | ,4319 |
| 1,5 | ,4332 | ,4345 | ,4357 | ,4370 | ,4382 | ,4394 | ,4406 | ,4418 | ,4429 | ,4441 |
| 1,6 | ,4452 | ,4463 | ,4474 | ,4484 | ,4495 | ,4505 | ,4515 | ,4525 | ,4535 | ,4545 |
| 1,7 | ,4554 | ,4564 | ,4573 | ,4582 | ,4591 | ,4599 | ,4608 | ,4616 | ,4625 | ,4633 |
| 1,8 | ,4641 | ,4649 | ,4656 | ,4664 | ,4671 | ,4678 | ,4686 | ,4693 | ,4699 | ,4706 |
| 1,9 | ,4713 | ,4719 | ,4726 | ,4732 | ,4738 | ,4744 | ,4750 | ,4756 | ,4761 | ,4767 |

**TABELA 03:** Foi informado nesta prova de concurso que a tabela abaixo dá os valores de  $P(0 < Z < z)$  quando  $Z$  tem distribuição normal padrão para valores selecionados de  $z$ . Por exemplo,  $P(0 < Z < 1,56) = 0,4406$ .

| $z$ | 00     | 06     | 08     |
|-----|--------|--------|--------|
| 1,0 | 0,3413 | 0,3554 | 0,3599 |
| 1,5 | 0,4332 | 0,4406 | 0,4429 |
| 1,9 | 0,4332 | 0,4750 | 0,4761 |
| 2,0 | 0,4772 | 0,4803 | 0,4812 |

**Atenção:** Em provas, sobretudo da banca FCC, muitas vezes a tabela da normal padrão não é fornecida, mas sim apenas alguns valores de probabilidade. Por exemplo, a questão pode fornecer as seguintes probabilidades:  $P(Z < 0,8) = 0,788$ ;  $P(Z < 1,25) = 0,894$ ;  $P(Z < 1,4) = 0,92$ . Então, durante a solução da questão, precisaremos escolher uma dessas probabilidades para se chegar a resposta da questão.

Já sabemos que o primeiro passo para obter a probabilidade na variável normal  $X$  é fazer a transformação de  $X$  para a variável normal padronizada  $Z$ . Contudo, para facilitar a aprendizagem do assunto, nos próximos exemplos mostraremos apenas o cálculo da probabilidade na variável normal padronizada  $Z$ . Depois, veremos resoluções completas de questões de concursos.

É super importante que você entenda e saiba resolver os próximos exemplos, pois os fundamentos ensinados neles serão bastante utilizados neste e nos demais capítulos deste livro.

**Exemplo 04.** Sabendo que a variável aleatória  $Z$  tem uma distribuição Normal com média 0 e variância 1, calcule as seguintes probabilidades:

| $z$ | $P(0 < Z < z)$ |
|-----|----------------|
| 0,5 | 0,191          |
| 0,6 | 0,226          |
| 0,7 | 0,258          |
| 0,8 | 0,288          |
| 0,9 | 0,316          |
| 1,5 | 0,433          |
| 1,6 | 0,445          |
| 1,7 | 0,455          |
| 1,8 | 0,464          |
| 1,9 | 0,471          |

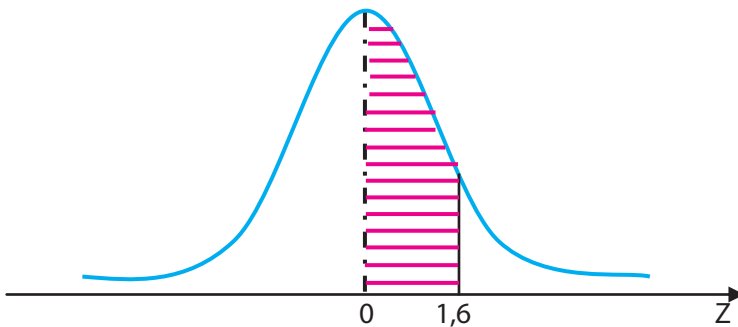
- I.  $P(0 < Z < 1,6)$
- II.  $P(Z < 0,9)$
- III.  $P(0,8 < Z < 1,8)$
- IV.  $P(-1,7 < Z < 0)$
- V.  $P(Z < -0,6)$
- VI.  $P(-1,8 < Z < 0,7)$

**Soluções:**

A variável  $Z$  é uma **variável normal padrão**, pois ela é uma variável normal com média 0 e desvio-padrão igual a 1. Logo, para calcular a probabilidade basta apenas a observação dos dados fornecidos na tabela. É aconselhável o desenho da curva normal para facilitar o raciocínio da resolução.

**I.  $P(0 < Z < 1,6)$** 

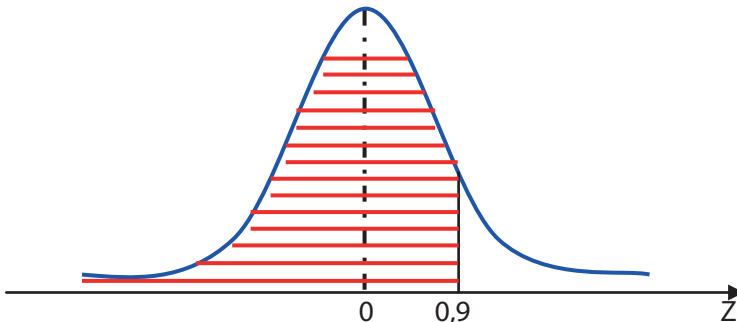
Esta probabilidade corresponde à área destacada abaixo:



A tabela forneceu o seguinte valor para  $z=1,6$ :  $P(0 < Z < 1,6) = 0,445$ . Portanto essa já é a resposta.

**II.  $P(Z < 0,9)$** 

Esta probabilidade corresponde à área destacada abaixo:



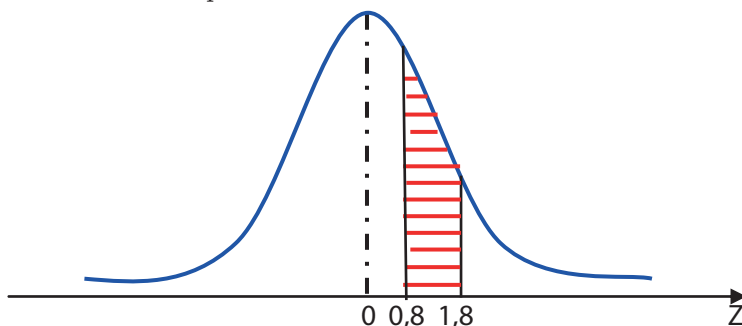
A tabela forneceu o seguinte valor para  $z=0,9$ :  $P(0 < Z < 0,9) = 0,316$ .

Vamos somar essa área com a área à esquerda de  $z=0$  (igual a 50% = 0,5). Daí:

$$P(Z < 0,9) = 0,316 + 0,5 = \mathbf{0,816 \text{ (resposta)}}$$

### III. $P(0,8 < Z < 1,8)$

Esta probabilidade corresponde à área destacada abaixo:



A tabela forneceu os seguintes valores para  $z=0,8$  e  $z=1,8$ :

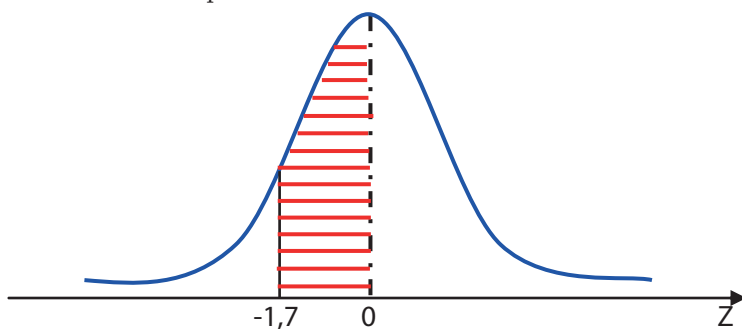
$$P(0 < Z < 0,8) = \mathbf{0,288} \text{ e } P(0 < Z < 1,8) = \mathbf{0,464}$$

Pela análise da curva normal, podemos encontrar a probabilidade solicitada subtraindo-se as duas probabilidades acima:

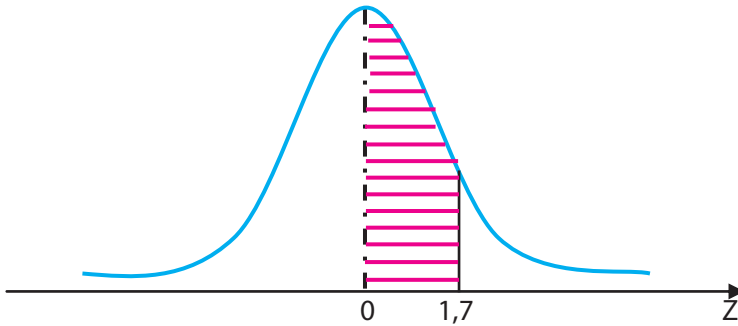
$$P(0,8 < Z < 1,8) = 0,464 - 0,288 = \mathbf{0,176 \text{ (resposta)}}$$

### IV. $P(-1,7 < Z < 0)$

Esta probabilidade corresponde à área destacada abaixo:



Aqui temos um  $z$  negativo, contudo a tabela fornecida é somente para valores positivos de  $z$ . Temos que passar esse  $z$  negativo para positivo. Como a curva normal é simétrica, podemos rebater a área destacada para o lado positivo e depois calcular a área equivalente abaixo:

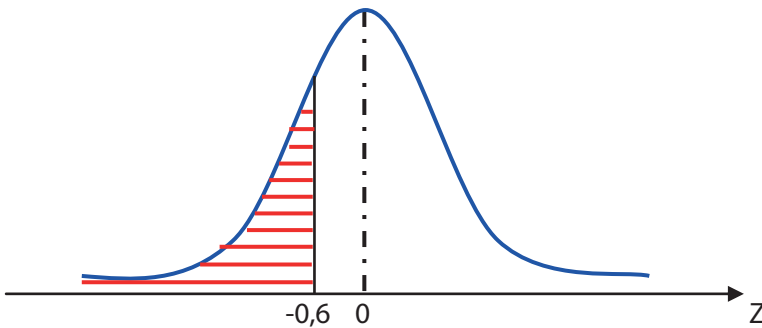


A tabela forneceu o seguinte valor para  $z=1,7$ :  $P(0 < Z < 1,7) = 0,455$ . Portanto, já chegamos à resposta:

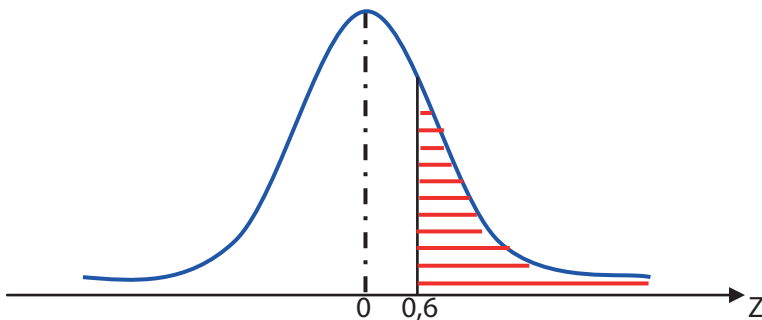
$$P(-1,7 < Z < 0) = P(0 < Z < 1,7) = 0,455 \text{ (resposta)}$$

#### V. $P(Z < -0,6)$

Esta probabilidade corresponde à área destacada abaixo:



Aqui temos um  $z$  negativo, contudo a tabela fornecida é somente para valores positivos de  $z$ . Temos que passar esse  $z$  negativo para positivo. Como a curva normal é simétrica, podemos rebater a área destacada para o lado positivo e depois calcular a área equivalente abaixo:



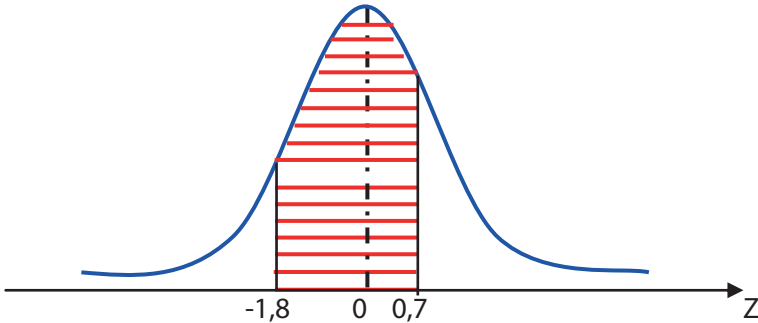
A tabela forneceu o seguinte valor para  $z=0,6$ :  $P(0 < Z < 0,6) = 0,226$ .

Para encontrar a área à direita de  $z=0,6$ , temos que subtrair a metade direita da curva normal ( $50\% = 0,5$ ) da área entre  $z=0$  e  $z=0,6$  (probabilidade acima). Daí:

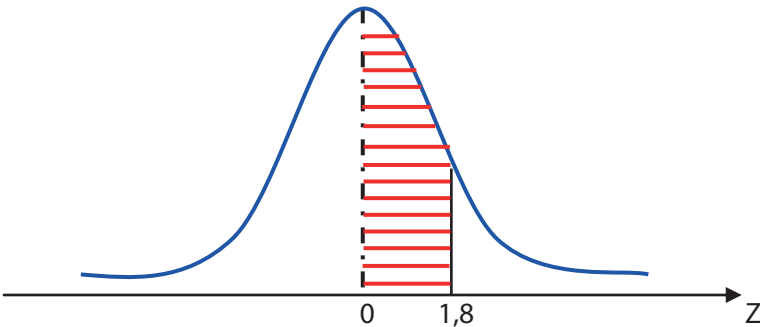
$$P(Z < -0,6) = P(Z > 0,6) = 0,5 - 0,226 = \mathbf{0,274 \text{ (resposta)}}$$

#### VI. $P(-1,8 < Z < 0,7)$

Esta probabilidade corresponde à área destacada abaixo:



A tabela forneceu o seguinte valor para  $z=0,7$ :  $P(0 < Z < 0,7) = \mathbf{0,258}$ . Assim, falta apenas a área entre  $z=-1,8$  e  $z=0$ . Vamos rebater essa área para o lado positivo da curva normal.



A tabela forneceu o seguinte valor para  $z=1,8$ :  $P(0 < Z < 1,8) = \mathbf{0,464}$ . Portanto, já encontramos a área destacada no desenho acima.

Temos que somar os dois resultados encontrados:

$$P(-1,8 < Z < 0,7) = 0,258 + 0,464 = \mathbf{0,722 \text{ (resposta)}}$$

**Exemplo 05.** A variável aleatória  $Z$  tem uma distribuição Normal com média 0 e variância 1. Com base na tabela fornecida, calcule as probabilidades solicitadas.

| $z$ | $P(Z < z)$ |
|-----|------------|
| 0,5 | 0,691      |
| 0,6 | 0,726      |
| 0,7 | 0,758      |
| 0,8 | 0,788      |
| 0,9 | 0,816      |